Неопределени интеграли. Доц. д-р Елена Върбанова.

	Интеграл	Метод
1.	От някои класове ирационални функции	
1а.	$\int R\left(x^{p_1/q_1}, x^{p_2/q_2}, \dots, x^{p_n/q_n}\right) dx$	$t = x^{1/k}$, $x = t^k$, $k = \text{НОК}(q_1, q_2, \dots, q_n)$
1б.	$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n/q_n}\right) dx$	$t = \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/k}$, $x = \dfrac{t^k d - b}{a - ct^k}$
2.	От диференциален бином $\int x^m (a + bx^n)^p dx$	
2а.	p — цяло число, т.е. $p \in \mathbb{Z}$	представлява интеграл от вида 1а
2б.	$p = \dfrac{r}{s}$; $r, s \in \mathbb{Z}$; $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$	$a + bx^n = t^s$, $x = \left(\dfrac{t^s - a}{b}\right)^{1/n}$
2в.	$p = \dfrac{r}{s}$; $r, s \in \mathbb{Z}$; $\left(\dfrac{m+1}{n} + p\right) \in \mathbb{Z}$	$ax^{-n} + b = t^s$, $x = \left(\dfrac{a}{t^s - b}\right)^{1/n}$
3.	Абелеви интеграли $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$	
3а.	$a > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$
3б.	$c > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt$
3в.	$b^2 - 4ac > 0$; α, β — реалните корени на квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$	$\sqrt{ax^2 + bc + c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} =$ $t(x - \alpha)$ или $t(x - \beta)$
4.	$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$	$x = a\sin(t)$, $dx = a\cos(t)dt$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos(t)$ или $x = a\cos(t)$, $dx = -a\sin(t)dt$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\sin(t)$
5.	$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$	$x = a\tan(t)$, $dx = \dfrac{adt}{\cos^2(t)}$, $\sqrt{a^2 + x^2} = \dfrac{a}{\cos(t)}$ или $x = a\sinh(t)$, $dx = a\cosh(t)dt$, $\sqrt{a^2 + x^2} = a\cosh(t)$
6.	$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$	$x = a\cosh(t)$, $dx = a\sinh(t)dt$, $\sqrt{x^2 - a^2} = a\sinh(t)$
7.	От рационални функции на $\sin(x)$ и $\cos(x)$ $\int R(\sin(x), \cos(x)) dx$	Универсална субституция $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = t$, $x = 2\arctan(t)$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
	Частни случаи	
7а.	$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	$\cos(x) = t$, $x = \arccos(t)$, $\sin(x) = \sqrt{1 - t^2}$
7б.	$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	$\sin(x) = t$, $x = \arcsin(t)$, $\cos(x) = \sqrt{1 - t^2}$
7в.	$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$	$\tan(x) = t$, $x = \arctan(t)$, $\sin(x) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

Таблица на производните на елементарните функции при аргумент $u(x)$	Таблица на неопределените интеграли при аргумент $u(x)$
$\{F[u(x)]\}' = F'[u(x)]u'(x) = f[u(x)]u'(x)$	$\int f[u(x)]u'(x) = \int f[u(x)]du(x) = F[u(x)] + C$
$\{[u(x)]^n\}' = n[u(x)]^{n-1}u'(x)$	$\int [u(x)]^n u'(x)dx = \int [u(x)]^n du(x) = \dfrac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + C$
$[e^{u(x)}]' = e^{u(x)}u'(x)$	$\int e^{u(x)}u'(x)dx = \int e^{u(x)}du(x) = e^{u(x)} + C$
$[a^{u(x)}]' = a^{u(x)}u'(x)\ln a$	$\int a^{u(x)}u'(x)dx = \int a^{u(x)}du(x) = \dfrac{a^{u(x)}}{\ln(a)} + C$
$[\ln u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\int \dfrac{u'(x)}{u(x)}dx = \int \dfrac{du(x)}{u(x)} = \ln\|u(x)\| + C$
$[\log_a u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)\ln a}$	$\int \dfrac{u'(x)}{u(x)}dx = \int \dfrac{du(x)}{u(x)} = \ln a \log_a \|u(x)\| + C$
$\{\sin[u(x)]\}' = \cos[u(x)]u'(x)$	$\int \cos[u(x)]u'(x)dx = \int \cos[u(x)]du(x) = \sin[u(x)] + C$
$\{\cos[u(x)]\}' = -\sin[u(x)]u'(x)$	$\int \sin[u(x)]u'(x)dx = \int \sin[u(x)]du(x) = -\cos[u(x)] + C$
$\{\tan[u(x)]\}' = \dfrac{u'(x)}{\cos^2[u(x)]}$	$\int \dfrac{u'(x)}{\cos^2[u(x)]}dx = \int \dfrac{du(x)}{\cos^2[u(x)]} = \tan[u(x)] + C$
$\{\cot[u(x)]\}' = -\dfrac{u'(x)}{\sin^2[u(x)]}$	$\int \dfrac{u'(x)}{\sin^2[u(x)]}dx = \int \dfrac{du(x)}{\sin^2[u(x)]} = -\cot[u(x)] + C$
$\{\arcsin[u(x)]\}' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$	$\int \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}dx = \int \dfrac{du(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} = \arcsin[u(x)] + C$
$\{\arccos[u(x)]\}' = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$	$\int \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}dx = \int \dfrac{du(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} = -\arccos[u(x)] + C$
$\{\arctan[u(x)]\}' = \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$\int \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}dx = \int \dfrac{du(x)}{1+u^2(x)} = \arctan[u(x)] + C$
$\{\mathrm{arccot}[u(x)]\}' = -\dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$\int \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}dx = \int \dfrac{du(x)}{1+u^2(x)} = -\mathrm{arccot}[u(x)] + C$
$\{\sinh[u(x)]\}' = \cosh[u(x)]u'(x)$	$\int \cosh[u(x)]u'(x)dx = \int \cosh[u(x)]du(x) = \sinh[u(x)] + C$
$\{\cosh[u(x)]\}' = \sinh[u(x)]u'(x)$	$\int \sinh[u(x)]u'(x)dx = \int \sinh[u(x)]du(x) = \cosh[u(x)] + C$
$\{\tanh[u(x)]\}' = \dfrac{u'(x)}{\cosh^2[u(x)]}$	$\int \dfrac{u'(x)}{\cosh^2[u(x)]}dx = \int \dfrac{du(x)}{\cosh^2[u(x)]} = \tanh[u(x)] + C$
$\{\coth[u(x)]\}' = -\dfrac{u'(x)}{\sinh^2[u(x)]}$	$\int \dfrac{u'(x)}{\sinh^2[u(x)]}dx = \int \dfrac{du(x)}{\sinh^2[u(x)]} = -\coth[u(x)] + C$

	Критерий	Предположения (нека; ако)	Твърдения (тогава; то)
I.	**Редове с неотрицателни членове**		
1.	Теорема за сравнение	$0 \le u_n \le v_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ Сл. 1 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ — сходящ Сл. 2 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ — разходящ	Случаи: Сл. 1 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ — сходящ Сл. 2 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ — разходящ
2.	Интегрален критерий на Маклорен-Коши	$f(x)$ е положителна и намаляваща функция за $\forall x \ge k$	Сл. 1 $\int_k^{\infty} f(x)dx$ — сходящ $\iff \sum_{n=k}^{\infty} f(n)$ — сходящ Сл. 2 $\int_k^{\infty} f(x)dx$ — разходящ $\iff \sum_{n=k}^{\infty} f(n)$ — разходящ
3^I.	Критерий на Даламбер	$u_n > 0,\ \forall n;\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$	Сл. 1 $l < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ — сходящ Сл. 2 $l > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ — разходящ
3^{II}.	Критерий на Коши	$u_n > 0,\ \forall n;\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$	
II.	**Алтернативни редове**		
4.	Критерий на Лайбниц	$u_n > u_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N};\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ — сходящ
III.	**Знакопроменливи редове**		
5.	Критерий на Даламбер	$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left\lvert \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\rvert = l$	Сл. 1 $l < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lvert u_n \rvert$ — сходящ $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ — абсолютно сходящ Сл. 2 $l > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lvert u_n \rvert$ — разходящ
6.	Критерий на Коши	$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert u_n \rvert} = l$	
IV.	**Степенни редове**		
7.	Теорема на Абел за сходимост/разходимост на степенния ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$	Сл. 1 $\exists\ x_0 \ne 0$, за което $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ е сходящ Сл. 2 $\exists\ x_* \ne 0$, за което $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_*^n$ е разходящ	Сл. 1 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ — сходящ, за $\forall x : \lvert x \rvert < \lvert x_0 \rvert$ Сл. 1 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ — разходящ, за $\forall x : \lvert x \rvert > \lvert x_* \rvert$
8.	Определяне на радиуса на сходимост R на степенния ред	$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = l$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} = l$	$R = \frac{1}{l}$ Интервал на сходимост $(-R, R)$ Изследване за $x = R$ и $x = -R$