Решени изпитни теми по Комплексен Анализ за Технически Университет — София

Николай Икономов

10 декември 2011 г.

Съдържание

Темите и основните решения на задачите са на проф. дмн Ралица Ковачева и са взети от нейната уебстраница (линк).

Допълнителни решения и обяснения към задачите, графики, дефиниции и основно оформление са от мен. За контакти: nike32@abv.bg, justmathbg.info.

- Първа тема (Април 2007)
- Втора тема (Май 2007)
- Трета, четвърта тема (Юни 2007)
- Пета тема (Март 2008)
- Шеста тема (ФПМИ, Юни 2006)
- Седма тема (ФПМИ, Юни 2009)

Указател

Задачите по категории.

- Конформни изображения (добре е да се четат в този ред)
  - степенна, логаритмична — 1-1
  - радикал — 1-2
  - дробно-линейна чрез инверсни точки — 1-3
  - Жуковски, дробно-линейна, ротация — 1-4
  - Жуковски, дробно-линейна, радикал — 3-1
  - дробно-линейна — 5-1
  - показателна, дробно-линейна — 5-2, 5-3
  - дробно-линейна чрез инверсни точки — 5-6
  - ротация, Жуковски, линейна, Жуковски наобратно — 6-2
  - степенна, транслация, Жуковски наобратно — 7-1
- Още задачи
  - хармонично спрегнати функции — 1-7, 6-1
  - резидууми — 3-3, 4-6, 6-3
  - разни — 3-5, 4-1

Задачите по теми.

- Първа тема — 1, 2, 3, 4, {5, 6}, 7
- Втора тема — {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
- Трета тема — 1, {2}, 3, {4}, 5, {6}
- Четвърта тема — 1, {2, 3, 4, 5}, 6
- Пета тема — 1, 2, 3, {4, 5}, 6, {7}
- Шеста тема — 1, 2, 3, {4а, 4б, 5а, 5б, 6а, 6б}
- Седма тема — 1, {2, 3, 4, 5}

Въведение

Основни понятия в комплексния анализ:
http://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number
http://en.wikipedia.org/wiki/Complex_analysis
http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_sphere
http://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection

Имагинерна единица:

$$i = \sqrt{-1},$$

като i^n има само четири различни стойности

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = -1.$$

Комплексно число z (може да означава и област z):

$$z = x + iy,$$

като реалната (real) и имагинерната (imaginary) част са:

$$\Re z = x,\ \Im z = y.$$

Комплексна равнина $\mathbb{C}$, съставена само от комплексни числа; разширена комплексна равнина $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (комплексна равнина с безкрайна точка); риманова сфера S (стереографска проекция на разширената комплексна равнина върху единична централна сфера).

По-нататък винаги се има предвид разширената комплексна равнина, но за по-кратко е написано само *комплексна равнина*.

Дефиниции

Дефиниция 1. *Степенна функция* [1, стр. 60].

Степенната функция $\omega = z^n$ трансформира ъгъл θ с големина $0 \leq \theta \leq 2\pi/n$ в ъгъл с големина $n\theta$ и връх в началото на координатната система.

Функцията съставено от реално число на степен n и сключва ъгъл $n\theta = n\arg(z)$ с положителната част на реалната права:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\arg(z)) + i\sin(n\arg(z))).$$

Ако върхът на ъгъла е в точка a: $\omega = (z-a)^n$, тогава се прави транслация с вектор a, за да се премести върхът в началото на координатната система.

Функцията има за граница лъч, излизащ от началото на координатната система и сключващ ъгъл φ_0 с положителната част на реалната права.

Резултатът от трансформацията е ъгъл φ с големина $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + n\theta$, това са лъчите ограничаващи ъгъла.

Ако $k = 1, 2, \ldots, n-1$, тогава ъгълът φ е с големина $\varphi_0 + 2k\pi \leq \varphi \leq \varphi_0 + n\theta + 2k\pi$.

Дефиниция 2. *Показателна функция* [1, стр. 91].

Показателната функция $\omega = e^z$ трансформира ивица с широчина $h \leq 2\pi$, успоредна на реалната права, в ъгъл с разтвор h и връх в началото на координатната система.

Функцията е съставена от експонента и формулата на Ойлер:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Функцията трансформира прави, успоредни на имагинерната права, в окръжности с център в началото на координатната система, и трансформира прави, успоредни на реалната права, в лъчи, излизащи от началото на координатната система.

Функцията има за граница правите $y = \varphi_0$ и $y = \varphi_0 + h$.

Резултатът от трансформацията е ъгъл φ с големина $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + h$, това са лъчите ограничаващи ъгъла.

Ако $k = 1, 2, 3, \ldots$, тогава ъгълът φ е с големина $\varphi_0 + 2k\pi \leq \varphi \leq \varphi_0 + h + 2k\pi$.

Дефиниция 3. *Радикал* [1, стр. 105].

Радикалът $\omega = \sqrt[n]{z} = z^{1/n}$ трансформира цялата комплексна равнина в ъгъл с големина $2\pi/n$ и връх в началото на координатната система.

Функцията е съставена от реално число на степен и формулата на Ойлер, като функцията сключва ъгъл $\theta = \arg(z)$ с положителната част на реалната права:

$$z^{1/n} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg(z) + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg(z) + 2k\pi}{n}\right).$$

Функцията има за граница лъч, излизащ от началото на координатната система и сключващ ъгъл $\theta = n\varphi_0$ с положителната част на реалната права.

Резултатът от трансформацията е ъгъл φ с големина $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + \dfrac{2\pi}{n}$, това са лъчите ограничаващи ъгъла.

Ако $k = 1, 2, \ldots, n-1$, тогава ъгълът φ е с големина $\varphi_0 + \dfrac{2k\pi}{n} \leq \varphi \leq \varphi_0 + \dfrac{2(k+1)\pi}{n}$.

Дефиниция 4. *Логаритмична функция* [1, стр. 117].

Логаритмичната функция $\omega = \log(z)$ трансформира цялата комплексна равнина в ивица, успоредна на реалната права, с широчина големината на ъгъла.

Функцията е съставена от натурален логаритъм $\ln|z|$, ъгъл спрямо положителната част на реалната права $\theta = \arg(z)$ и клон $2k\pi i$:

$$\log(z) = \ln|z| + i\arg(z) + 2k\pi i.$$

Функцията има за граница лъч, излизащ от началото на координатната система и сключващ ъгъл $\varphi_0 = v_0$ с положителната част на реалната права.

Резултатът от трансформацията е ивица, успоредна на реалната права, ивицата е със широчина v: $v_0 \leq v \leq v_0 + 2\pi$.

Ако $k = 1, 2, 3, \ldots$, тогава широчината е: $v_0 + 2k\pi \leq v \leq v_0 + 2(k+1)\pi$.

Дефиниция 5. *Линейна функция* [1, стр. 43], [2, стр. 48].

Линейната функция

$$\omega = \alpha z + \beta = |\alpha| e^{i\arg(\alpha)} z + \beta$$

е композиция от следните функции: хомотетия с коефициент $|\alpha|$, ротация на ъгъл $\theta = \arg(\alpha)$ чрез $e^{i\arg(\alpha)}$, транслация на цялата комплексна равнина по посока на вектора β. (Нека да отбележим, че функцията $e^{i\theta} = e^{i\arg(\alpha)}$ не зависи от z).

Комплексните числа могат да се представят така:

$$\alpha = |\alpha| e^{i\arg(\alpha)},$$

като $|\alpha|$ определя разстоянието на числото от началото на координатната система, а $e^{i\arg(\alpha)}$ определя ъгълът $\theta = \arg(\alpha)$, който векторът през $|\alpha|$ сключва с положителната част на реалната права.

Пълното представяне е:

$$\alpha = e^{\log(\alpha)} = e^{\ln|\alpha| + i\arg(\alpha) + 2k\pi i} = |\alpha| e^{i\arg(\alpha)} e^{2k\pi i},$$

където клонът на логаритъма се определя от $e^{2k\pi i}$, но той често е главният клон $k = 0$ при което $e^{2k\pi i} = 1$.

Функцията е частен случай на дробно-линейната функция при $c = 0$:

$$\omega = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \alpha z + \beta,\ \alpha = \frac{a}{d},\ \beta = \frac{b}{d}.$$

Линейната функция още се нарича цяла линейна функция.

Дефиниция 6. *Дробно-линейна функция* [1, стр. 42, 62, 71].

Дробно-линейната функция $\omega = \dfrac{az+b}{cz+d}$ трансформира цялата комплексна равнина отново в цялата комплексна равнина.

Нека точките (z, z_1, z_2, z_3) се трансформират в $(\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Тогава *двойно отношение на точки* се нарича релацията:

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} = \frac{\omega-\omega_1}{\omega-\omega_2} : \frac{\omega_3-\omega_1}{\omega_3-\omega_2}.$$

Това дава дробно-линейната функция в неявен вид.

Дробно-линейната функция още се нарича трансформация на Мьобиус (Möbius).

Дефиниция 7. *Инверсни точки* [1, стр. 77].

Формула за намиране на инверсна точка z^* на точка z спрямо централна окръжност с радиус R:

$$z^* = \frac{R^2}{\overline{z}} \Longleftrightarrow z^*\overline{z} = R^2.$$

Формула за намиране на инверсна точка z^* на точка z спрямо окръжност с център c и радиус R:

$$z^* - c = \frac{R^2}{\overline{z-c}} \Longleftrightarrow (z^* - c)(\overline{z-c}) = R^2.$$

Формула за намиране на инверсна точка z^* на точка z спрямо права γ, като правата γ е под наклон θ с положителната част на реалната права, и сключва прав ъгъл в точка c с друга права γ_0, като правата γ_0 свързва z и z^* ($\gamma \perp \gamma_0$):

$$z^* - c = e^{i\theta}(\overline{z-c}).$$

Инверсните точки още се наричат симетрични точки.

Дефиниция 8. *Функция на Жуковски* [1, стр. 84].

Функцията на Жуковски $\omega = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ трансформира вътрешността и външността на единичния кръг в цялата комплексна равнина без отсечката $[-1, 1]$, а единичната окръжност се трансформира на отсечката $[-1, 1]$.

Единичната окръжност се трансформира на отсечката $[-1, 1]$, като я пробягва два пъти: горната полуокръжност отива в долния бряг на отсечката, а долната полуокръжност отива в горния бряг.

Дефиниция 9. *Обратна функция на Жуковски* [2, стр. 57].

Обратната функция на Жуковски $\omega = z+\sqrt{z^2-1}$ трансформира цялата комплексна равнина без отсечката $[-1, 1]$ във вътрешността или външността на единичния кръг, а отсечката $[-1, 1]$ се трансформира в единичната окръжност.

Функцията е:

$$\omega = z + \sqrt{z^2-1} = z + |z^2-1|^{1/2} e^{\frac{i\arg(z-1)}{2}} e^{\frac{i\arg(z+1)}{2}} e^{k\pi i}.$$

Чрез $z^\alpha = e^{\log(z^\alpha)} = e^{\alpha \log(z)}$ и дефиниция 4 разлагането на радикала е:

$$(z^2-1)^{1/2} = e^{\log(z^2-1)^{1/2}} = e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)} = e^{\frac{1}{2}\left(\ln|z^2-1| + i\arg(z^2-1) + 2k\pi i\right)} =$$
$$= e^{\frac{1}{2}\ln|z^2-1|} e^{\frac{i\arg(z^2-1)}{2}} e^{k\pi i} = |z^2-1|^{1/2} e^{\frac{i\arg(z-1)}{2}} e^{\frac{i\arg(z+1)}{2}} e^{k\pi i}.$$

Функцията изобразява външността на единичния кръг при $k = 0$ и вътрешността на единичния кръг при $k = 1$. Големината на ъглите $\theta_1 = \arg(z-1)$ и $\theta_2 = \arg(z+1)$ се изчислява или в положителна посока (обратно на часовниковата стрелка) или в отрицателна посока (по часовниковата стрелка), като се започва от положителната част на реалната права. Не трябва да се смесват посоките!

Функцията има за граница единичната окръжност, която разделя комплексната равнина на две области: вътрешност и външност на единичния кръг.

1 Първа тема

Задача 1. Да се изобрази конформно и еднозначно областта $\{z,\ 0 < \arg(z) < 2\pi/3\}$ върху ивицата $\{\omega,\ 0 < \Im\omega < 2\pi\}$.

Задача 2. Да се изобрази конформно и еднолистно цялата комплексна равнина, разрязана по положителната част на имагинерната ос, върху областта $\{\omega,\ -\pi/2 < \arg(\omega) < \pi/6\}$.

Задача 3. Да се изобрази конформно и еднолистно вътрешността на кръга $D_0(2)$ върху единичния кръг, по такъв начин, че $\dfrac{1+i}{2} \to 0$.

Задача 4. Да се изобрази външността на единичния кръг върху цялата комплексна равнина, разрязана по лъча $\{\omega,\ \arg(\omega) = \pi/4\}$.

Задача 5. Нека D е област в $\mathbb{C}$ и функцията $f(z)$ е аналитична в D: $f(z) \in A(D)$. Възможно ли е комплексно спрегнатата функция $\overline{f}(z)$ да е аналитична в D: $\overline{f}(z) \in A(D)$ и кога?

Задача 6. Нека D е област в $\mathbb{C}$ и функцията $f(z)$ е аналитична в D: $f(z) \in A(D)$. Нека $|f(z)| \equiv \mathrm{Const}$ в D. Докажете, че това е възможно, тогава и само тогава, когато $f(z)$ е тъждествена константа в D.

Задача 7. Да се намери аналитична функция $f(z)$, за която $\Re f(z) = (e^y + e^{-y})\cos(x)$ и $f(0) = 1$.

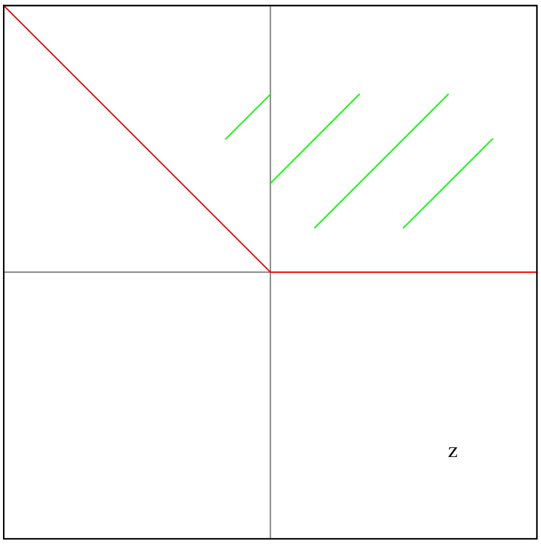
Задача 1. Да се изобрази конформно и еднозначно областта $\{z,\ 0 < \arg(z) < 2\pi/3\}$ върху ивицата $\{\omega,\ 0 < \Im\omega < 2\pi\}$.

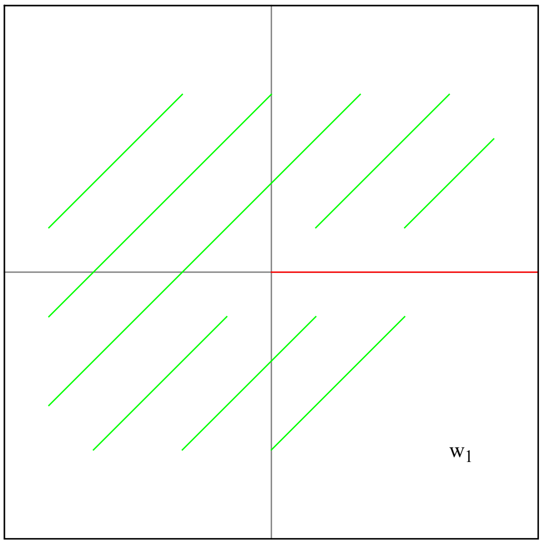
Решение. Функцията $\arg(z)$ означава, че имаме ъгъл с големина $2\pi/3 - 0 = 2\pi/3$ спрямо z. И търсим трансформация ω, която ще изпрати този ъгъл в ивицата 0 до 2π, успоредна на реалната ос.

Функцията $\omega = z^n$ може да трансформира ъгъл в цялата комплексна равнина (дефиниция 1). Цялата равнина може да се представи като ъгъл с разтвор 2π, а ние по условие имаме ъгъл $2\pi/3$. Следователно функцията $\omega_1 = z^3$ трансформира нашия ъгъл в цялата комплексна равнина, разрязана по положителната част на реалната права.

В комплексния анализ всяка област има някаква граница, в случая с нашия даден ъгъл границата му се състои от двата лъча (и ъгъла е затворен между тях). А цялата комплексна равнина е ъгъл с разтвор 2π и граница който си поискаме лъч (започващ от нулата). Можем да си представим как, примерно, лъча тръгва от положителната част на реалната права (от горната страна), описва цялата равнина, и се слива отново с положителната част на реалната права, само че идвайки от долната страна. (Границите на областите във файла са дадени с червен цвят).

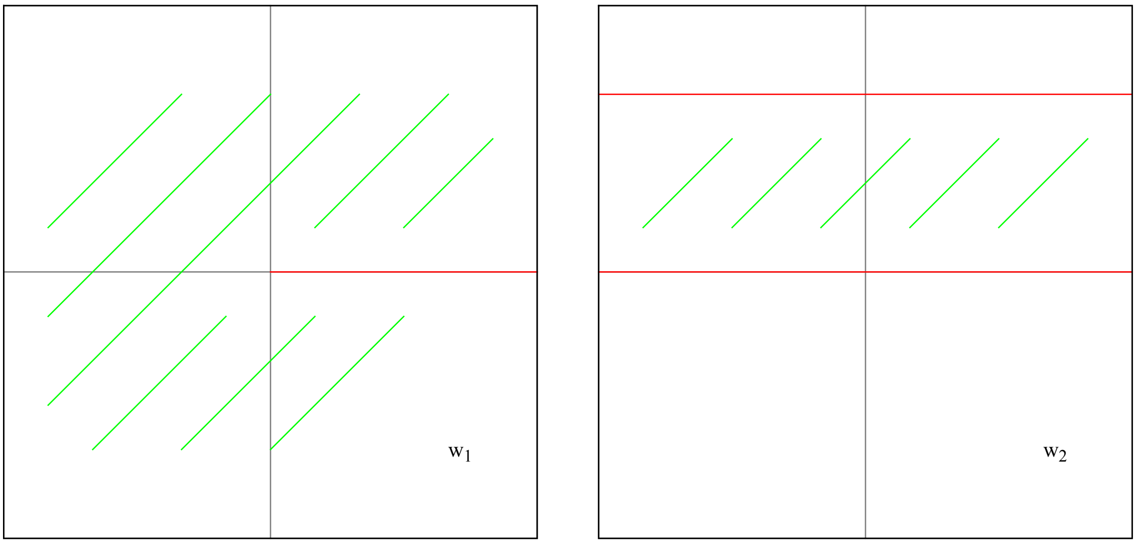
Условието на задачата е дадено на лявата графика, а функцията $\omega_1 = z^3$ е на дясната графика. Това е нашата първа трансформация.





Логаритмичната функция $\log(z)$ трансформира ъгъл с разтвор най-много 2π (цялата равнина или част от нея) в ивица успоредна на реалната права, като ивицата е с широчина големината на ъгъла (най-много 2π). Ние имаме цялата комплексна равнина, така че функцията $\omega_2 = \log(\omega_1) = \log(z^3)$ трансформира цялата комплексната равнина в ивица с широчина 2π, успоредна на реалната права. (В тази задача няма да се притесняваме за клоновете на логаритмичната функция, тъй като и двете трансформации са от положителната част на реалната права).

Предишната трансформация $\omega_1 = z^3$ е дадена вляво, а новата трансформация $\omega_2 = \log(\omega_1)$ е вдясно.



Следователно решението е композиция от функциите ω_1 и ω_2. Композиция се записва така:

$$\omega = \omega_2 \circ \omega_1(z),$$

което означава, че първо извършваме трансформацията ω_1, а след това и ω_2.

По-лесен и разбираем запис е:

$$\omega = \omega_2(\omega_1) = \log(z^3).$$

Но не винаги можем да запишем така, особено ако имаме повече от две трансформации. Това е търсената трансформация и решението на задачата.

Но изниква въпросът: дали е възможно да запишем $\omega = 3\log(z)$?

В конкретния случай е възможно, но по принцип трансформациите трябва да се прилагат една след друга (така наречената композиция на функции), защото в противен случай може да получим грешен отговор.

Ето и втория начин за решаване на задачата. Имаме даден ъгъл с разтвор $2\pi/3$. Прилагаме функцията $\omega_1 = \log(z)$, и тя ще трансформира този ъгъл в ивица с широчина $2\pi/3$, успоредна на реалната права. Сега прилагаме функцията $\omega_2 = 3\omega_1$ (хомотетия, дефиниция 5), и тя увеличава широчината на ивицата от $2\pi/3$ на 2π.

Следователно решението се записва като:

$$\omega = \omega_2(\omega_1) = 3\log(z).$$

Проверка на задачата. Нека да вземем точка от областта z, примерно i, записваме числото в тригонометричен вид:

$$i = |1|\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right),$$

прилагаме първата трансформация (дефиниция 1):

$$\omega_1(i) = i^3 = |1|^3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 0 - i = -i.$$

Записваме и това число в тригонометричен вид:

$$-i = |1|\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right),$$

имаме главния клон на логаритъма: $k = 0$, $\arg(i) = 3\pi/2$ (дефиниция 4):

$$\omega_2 = \log(-i) = \ln|1| + i\frac{3\pi}{2} + 0 = \frac{3\pi}{2}i.$$

Което е в търсената област.

Сега да видим и чрез второто решение $\omega = 3\log(z)$:

$$\omega_1 = \log(i) = \ln|1| + i\frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}i.$$

Умножаваме с три и получаваме отново точка в търсената област:

$$\omega_2 = 3\frac{\pi}{2}i = \frac{3\pi}{2}i.$$

Решението на задачата е вярно. □

Задача 2. Да се изобрази конформно и еднолистно цялата комплексна равнина, разрязана по положителната част на имагинерната ос, върху областта $\{\omega,\ -\pi/2 < \arg(\omega) < \pi/6\}$.

Решение. Имаме цялата комплексна равнина и искаме да я изобразим в ъгъл с големина $\pi/6 - (-\pi/2) = 2\pi/3$, което е $1/3$ от комплексната равнина. Следователно функцията $\omega = z^{1/3}$ трансформира цялата комплексна равнина в $1/3$ от нея (дефиниция 3).

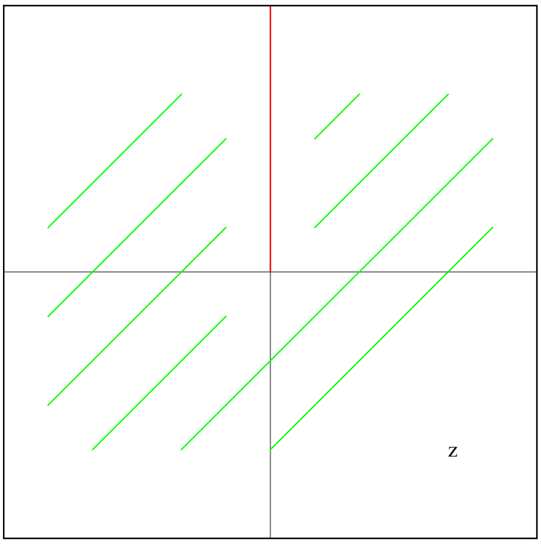
Условието е да изобразим цялата комплексна равнина, която е разрязана по положителната част на имагинерната права, като тази положителна част на имагинерната права сключва ъгъл $\theta = \pi/2$ с положителната част на реалната права (като ние знаем, че $\theta = \arg(z)$). Следователно, ние трябва да определим ъгъла φ_0, който ще сключва трансформацията с положителната част на реалната права. От дефиниция 3 относно радикала:

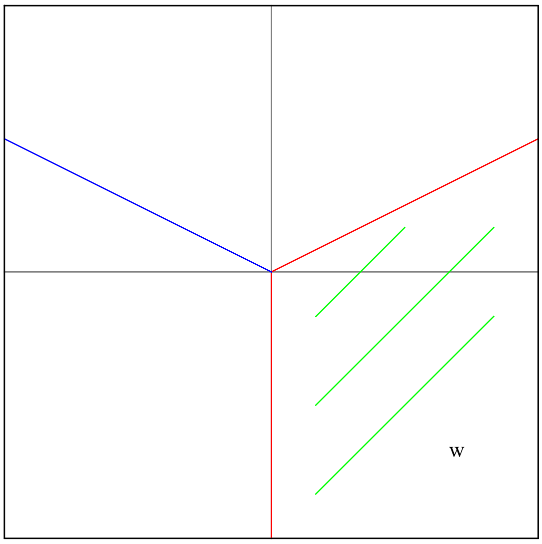
Функцията има за граница лъч, излизащ от началото на координатната система и сключващ ъгъл $\theta = n\varphi_0$ с положителната част на реалната права.

Този ъгъл при нас е $\pi/2$. Следователно:

$$\theta = n\varphi_0 \Longrightarrow \frac{\pi}{2} = 3\varphi_0 \Longrightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6}.$$

Защото ние вече решихме, че $\omega = z^{1/3}$, тоест $n = 3$.





Както се вижда на графиката: вляво положителната част на имагинерната права сключва ъгъл $\theta = \pi/2$ с положителната част на реалната права; вдясно трансформацията сключва ъгъл $\varphi_0 = \pi/6$ с положителната част на реалната права.

Търсената област е защрихована в зелено, другите две области, които се получават при трансформацията, са ограничени от червените лъчи и синия лъч.

Тези лъчи са определени от формулата за радикал от дефиниция 3:

$$z^{1/n} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg(z)+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg(z)+2k\pi}{n}\right).$$

При нас е:

$$z^{1/3} = |z|^{1/3}\left(\cos\frac{\pi/2+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi/2+2k\pi}{3}\right).$$

Нека $k = 0$:

$$z^{1/3} = |z|^{1/3}\left(\cos\frac{\pi/2}{3} + i\sin\frac{\pi/2}{3}\right) = |z|^{1/3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Първият лъч е червеният през $\pi/6$, той съвпада с φ_0. Сега $k = 1$:

$$z^{1/3} = |z|^{1/3}\left(\cos\frac{\pi/2+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi/2+2\pi}{3}\right) = |z|^{1/3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Вторият лъч е синият: през $5\pi/6$. Сега и $k = 2$:

$$z^{1/3} = |z|^{1/3}\left(\cos\frac{\pi/2+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi/2+4\pi}{3}\right) = |z|^{1/3}\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right).$$

Третият лъч е другия червен: през $9\pi/6 = 3\pi/2$. Имаме само три лъча, защото разделихме комплексната равнина на три части. Всеки следващ лъч ще съвпадне с някой от тези трите, ще му се добави един пълен оборот от 2π.

Това, което остава е да определим клонът на радикала — стойността на k в:

$$z^{1/3} = |z|^{1/3}\left(\cos\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right).$$

Така ще фиксираме клона на радикала и ще получим точната трансформация.

Поглеждаме лъчите: червен лъч през $\pi/6$ ($k = 0$), син лъч през $5\pi/6$ ($k = 1$), червен лъч през $3\pi/2$ ($k = 2$). А условието е: $\{\omega,\ -\pi/2 < \arg(\omega) < \pi/6\}$. Както се вижда, едва едва закачаме областта при $k = 0$. Следователно трябва да върнем един оборот назад: $k = -1$. Лъчът се определя от формулата:

$$z^{1/3} = |z|^{1/3}\left(\cos\frac{\pi/2 - 2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi/2 - 2\pi}{3}\right).$$

Решението на задачата е $z^{1/3}$ с клона $k = -1$:

$$z^{1/3} = |z|^{1/3}\left(\cos\frac{\arg(z) - 2\pi}{3} + i\sin\frac{\arg(z) - 2\pi}{3}\right).$$

Проверка на задачата. Нека да вземем точка от областта: $-i$, записваме числото в тригонометричен вид:

$$-i = |1|\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right),$$

тогава

$$\begin{aligned}(-i)^{1/3} &= |1|^{1/3}\left(\cos\frac{3\pi/2 - 2\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi/2 - 2\pi}{3}\right) = \\ &= \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Което е в търсената област. Решението на задачата е вярно. □

Задача 3. Да се изобрази конформно и еднолистно вътрешността на кръга $D_0(2)$ върху единичния кръг, по такъв начин, че $\dfrac{1+i}{2} \to 0$.

Решение. Искаме да трансформираме вътрешността на кръг с радиус две във вътрешността на единичния кръг. Още искаме точката $a = (1+i)/2$ да отива в нулата.

Ако използваме инверсни точки, то инверсната точка a^* на a трябва да се трансформира в безкрайност, защото нулата и безкрайната точка са инверсни (дефиниция 7):

$$\infty = \frac{R^2}{0} \Longleftrightarrow 0 = \frac{R^2}{\infty}.$$

Инверсната точка a^* е:

$$a^* = \frac{R^2}{\overline{a}} = \frac{4}{(1-i)/2} = \frac{8}{1-i} = 8\frac{1+i}{2}.$$

Нека да преговорим: точката a отива в 0, точката a^* отива в ∞. Можем да запишем дробно-линейна трансформация чрез инверсни точки:

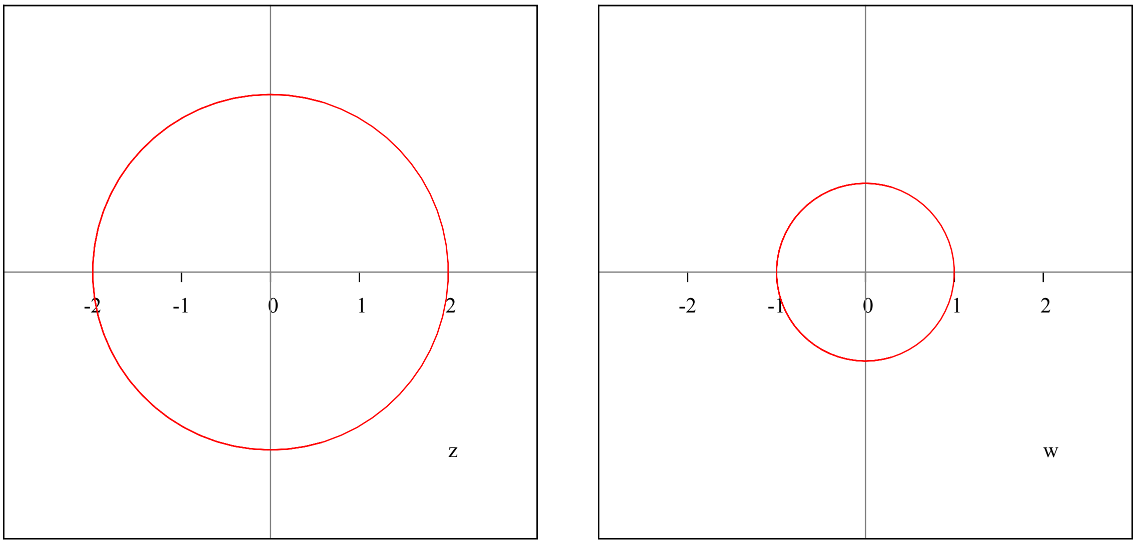
$$\omega = \lambda \frac{z-a}{z-a^*}.$$

Нека да преобразуваме:

$$\omega = \lambda \frac{z-a}{z-a^*} = \lambda \frac{z-a}{z-R^2/\overline{a}} = -\lambda\overline{a}\frac{z-a}{R^2-z\overline{a}} = \mu \frac{z-a}{R^2-z\overline{a}}.$$

Ако $|\mu| = R^2$, то кръг с радиус R се трансформира в кръг с радиус R. Ние искаме кръг с радиус $R = 2$ да се трансформира в единичния кръг, тогава: $|\mu| = R = 2$. Решението е:

$$\omega = \mu \frac{z-a}{R^2-z\overline{a}}, \ |\mu| = 2.$$



Проверка на задачата. Нека да вземем точката 1:

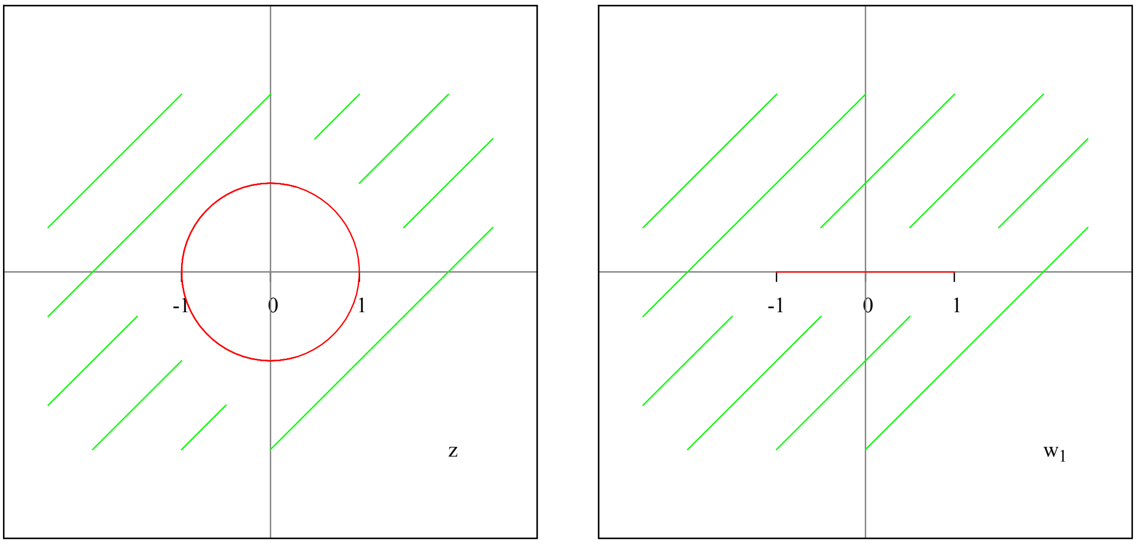
$$\begin{aligned}\omega(1) &= \mu\frac{z-a}{R^2-z\overline{a}} = 2\frac{1-(1+i)/2}{4-(1-i)/2} = 2\frac{2-(1+i)}{8-(1-i)} = \\ &= 2\frac{2-1-i}{8-1+i} = 2\frac{1-i}{7+i} = 2\frac{(1-i)(7-i)}{7^2-i^2} = 2\frac{7-i-7i+i^2}{49+1} = \\ &= 2\frac{6-8i}{50} = \frac{6-8i}{25}.\end{aligned}$$

Което е в търсената област. Решението на задачата е вярно, но все пак подлежи на потвърждение. □

Задача 4. Да се изобрази външността на единичния кръг върху цялата комплексна равнина, разрязана по лъча $\{\omega, \ \arg(\omega) = \pi/4\}$.

Решение. Имаме дадена цялата комплексна равнина без вътрешността на единичния кръг, и границата на областта е самия единичен кръг.

Прилагаме функцията на Жуковски $\omega_1 = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ (дефиниция 8), като външността на единичния кръг се трансформира в цялата комплексна равнина, без отсечката $[-1, 1]$, а единичният кръг се трансформира в отсечката $[-1, 1]$.



Сега трябва да намерим дробно-линейна трансформация, която изпраща отсечката $[-1, 1]$ в положителната част на реалната права (директно там, за да не се занимаваме с това какъв наклон сключва лъчът с положителната част на реалната права, сега ъгълът ще е нула — буквално съвпада).

Пробягваме отсечката $[-1, 1]$, като взимаме точките -1, 0, 1 или 1, 0, -1, в тази последователност.

Искаме резултатът от трансформацията да е положителната част на реалната права, можем да я представим с последователността от точки: 0, 1, ∞.

Нека първо да вземем:

$$(z, 1, 0, -1) \to (\omega, 0, 1, \infty).$$

Записваме двойното отношение на точките (от дефиниция 6):

$$\frac{z-1}{z-0} : \frac{-1-1}{-1-0} = \frac{\omega - 0}{\omega - 1} : \frac{1}{1}.$$

Там, където присъства безкрайност, заменяме с единица.

$$\frac{z-1}{z} : \frac{-2}{-1} = \frac{\omega}{\omega - 1} \Longrightarrow \frac{z-1}{2z} = \frac{\omega}{\omega - 1},$$
$$2z\omega = (z-1)(\omega - 1) \Longrightarrow 2z\omega = z\omega - z - \omega + 1,$$
$$2z\omega - z\omega + \omega = 1 - z \Longrightarrow z\omega + \omega = 1 - z,$$

$$\omega(1+z) = 1 - z \Longrightarrow \omega = \frac{1-z}{1+z}.$$

Нека сега да вземем:

$$(z, -1, 0, 1) \to (\omega, 0, 1, \infty).$$

Записваме отново двойното отношение:

$$\frac{z+1}{z-0} : \frac{1+1}{1-0} = \frac{\omega - 0}{\omega - 1} : \frac{1}{1}.$$

И получаваме:

$$\frac{z-1}{z} : \frac{2}{1} = \frac{\omega}{\omega - 1} \Longrightarrow \frac{z-1}{2z} = \frac{\omega}{\omega - 1},$$

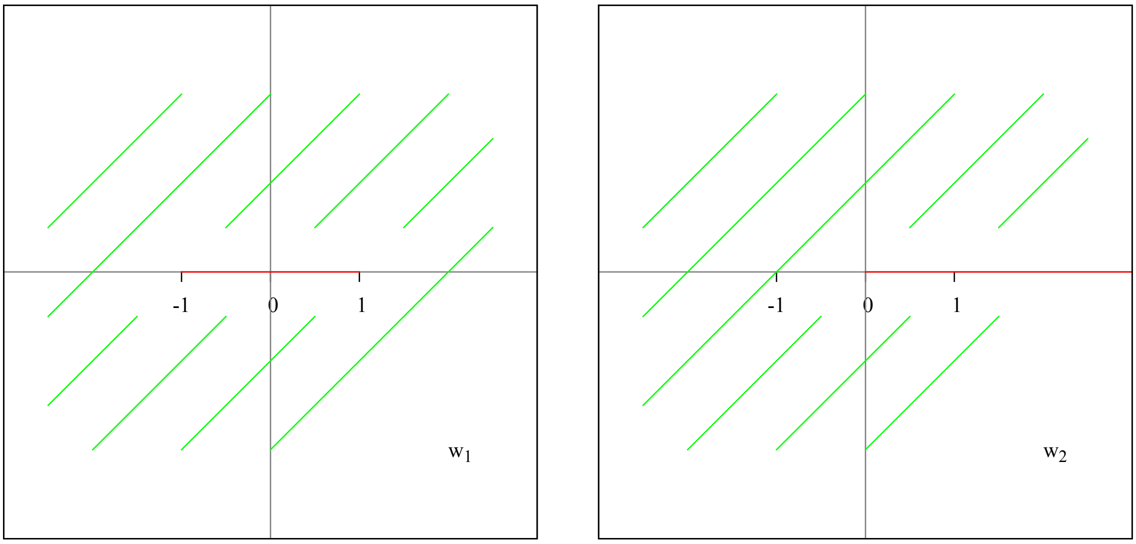
същия отговор като преди малко.

Дробно-линейната функция, която изпраща отсечката $[-1, 1]$ в положителната част на реалната права, е:

$$\omega = \frac{1-z}{1+z}.$$

Следователно нашата втора трансформация (записана спрямо първата ω_1) е:

$$\omega_2 = \frac{1-\omega_1}{1+\omega_1}.$$



Тази дробно-линейна функция трансформира цялата комплексна равнина без отсечката $[-1, 1]$ в цялата комплексна равнина, разрязана по положителната част на реалната права.

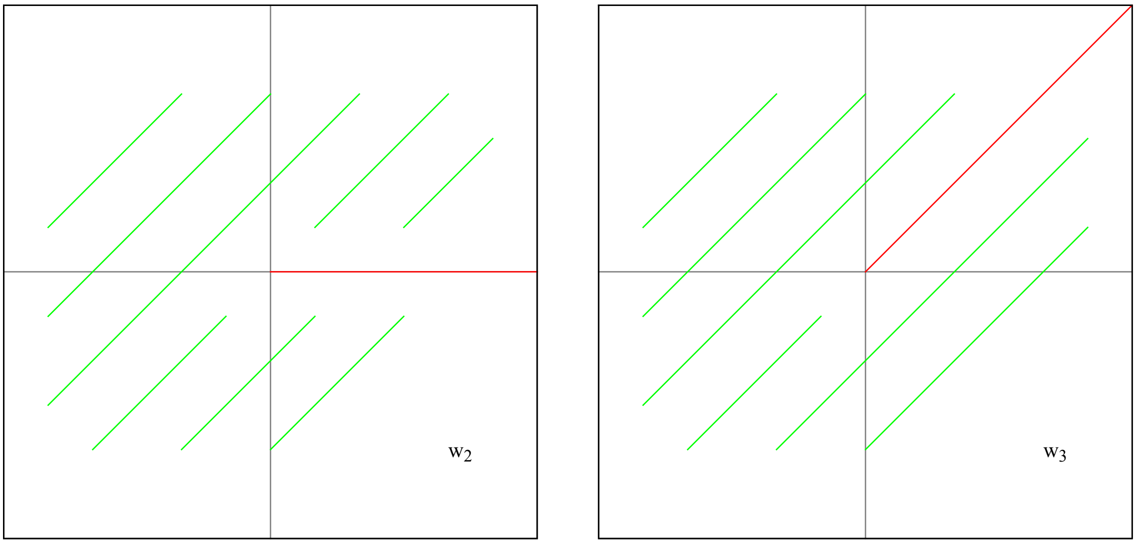
Нека да си припомним условието: $\{\omega,\ \arg(\omega) = \pi/4\}$, което означава че търсената област е цялата комплексна равнина, разрязана по лъча през $\pi/4$. Остава да направим ротация на ъгъл $\pi/4$ и ще получим исканата област.

Тогава записваме ротация на ъгъл $\theta = \pi/4$ (дефиниция 5):

$$\omega = e^{i\theta} z = e^{i\pi/4} z.$$

Следователно последната ни трета трансформация (спрямо ω_2) е:

$$\omega_3 = e^{i\pi/4}\omega_2.$$



Решението на задачата е композиция от функциите:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \ \omega_2 = \frac{1-\omega_1}{1+\omega_1}, \ \omega_3 = e^{i\pi/4}\omega_2,$$

(това са функция на Жуковски, дробно-линейна функция, ротация) и може да се запише така:

$$\omega = \omega_3 \circ \omega_2 \circ \omega_1(z).$$

Този запис означава, че извършваме трансформациите отдясно наляво: първо ω_1, после ω_2 и накрая ω_3.

Проверка на задачата. Нека да вземем точката 2:

$$\omega_1(2) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{5}{2} = \frac{5}{4},$$

$$\omega_2(5/4) = \frac{1-5/4}{1+5/4} = \frac{4-5}{4+5} = -\frac{1}{9},$$

$$\omega_3(-1/9) = -\frac{1}{9}e^{i\pi/4} = -\frac{1}{9}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Което е в търсената област. Решението на задачата е вярно. □

Задача 7. Да се намери аналитична функция $f(z)$, за която $\Re f(z) = (e^y + e^{-y})\cos(x)$ и $f(0) = 1$.

Решение. *Теорията е във файла по Висша Математика III.*

Имаме дадена реалната функция:

$$u(x, y) = (e^y + e^{-y}) \cos(x).$$

Трябва да намерим хармонично спрегнатата функция $v(x, y)$ (също реална, но ще изпълнява ролята на имагинерна компонента в $f(z)$), за да запишем:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Намираме първа и втора производна спрямо x:

$$u'_x = -(e^y + e^{-y}) \sin(x),\ \ u''_{xx} = -(e^y + e^{-y}) \cos(x).$$

Сега първа и втора производна спрямо y:

$$u'_y = (e^y - e^{-y}) \cos(x),\ \ u''_{yy} = (e^y + e^{-y}) \cos(x).$$

Уравнението на Лаплас $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ е изпълнено. Можем да продължим.

Използваме уравненията на Коши-Риман (които вече изчислихме):

$$\left| \begin{array}{l} u'_x = -(e^y + e^{-y}) \sin(x) = v'_y, \\ u'_y = (e^y - e^{-y}) \cos(x) = -v'_x. \end{array} \right.$$

Взимаме първото уравнение: $u'_x = v'_y$, и интегрираме $v(x, y)$ по y:

$$v(x, y) = -\int (e^y + e^{-y}) \sin(x) dy + \varphi(x) = -(e^y - e^{-y}) \sin(x) + \varphi(x).$$

Имаме функция по x, защото интегрирахме по y.

Сега диференцираме $v(x, y)$ по x, за да използваме и второто уравнение $v'_x = -u'_y$:

$$v'_x = -(e^y - e^{-y}) \cos(x) + \varphi'(x) = -(e^y - e^{-y}) \cos(x) = -u'_y,$$

$$\varphi'(x) = 0 \Longrightarrow \varphi(x) = C.$$

Където C е константа, която трябва да намерим с началното условие $f(0) = 1$.

Следователно функцията $v(x, y)$ е:

$$v(x, y) = -(e^y - e^{-y}) \sin(x) + C.$$

Записваме $f(z)$ и заместваме с $f(0) = 1$:

$$f(z) = (e^y + e^{-y}) \cos(x) - i(e^y - e^{-y}) \sin(x) + iC,$$

$$f(0) = (1 + 1) \cos(0) - i(1 - 1) \sin(0) + iC = 1,$$

$$2 + iC = 1 \Longrightarrow iC = -1 \Longrightarrow C = -\frac{1}{i} \Longrightarrow C = i.$$

Решението е:

$$f(z) = (e^y + e^{-y}) \cos(x) - i(e^y - e^{-y}) \sin(x) - 1.$$

□

2 Втора тема

Задача 1. Докажете, че:

$$\left| \int_\gamma e^{\sin(z)} dz \right| \leq 1,$$

като интегрирането се извършва по имагинерната отсечка $\gamma : [0, i]$.

Задача 2. Вярно ли е равенството:

$$\oint_{C_0(1)} \overline{z} dz = \oint_{C_0(1)} \frac{1}{z} dz \ ?$$

Обосновете отговора си.

Задача 3. Нека Γ е гладък контур, свързващ точките $-3i$ и $3i$, и лежащ в дясната полуравнина $\{z,\ \Re z > 0\}$. Пресметнете:

$$\int_\Gamma \frac{1}{z} dz.$$

Задача 4. Нека функцията $f(z)$ е аналитична в единичния кръг $D_0(1)$: $f(z) \in A(D_0(1))$, и $|f(z)| \leq M$ всеки път когато $|z| = 1$. Докажете, че $|f(0)| \leq M$ и $|f'(0)| \leq M$. Какво можем да кажем за $f^{(n)}(0)$?

Задача 5. Съществува ли степенен ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, който да е сходящ в точката $z = 2 + 3i$ и разходящ в $z = 3 - i$?

Задача 6. Намерете развитието в ред на Лоран на функцията:

$$f(z) = z^2 \cos\left(\frac{1}{3z}\right)$$

за $|z| > 0$.

Задача 7. Намерете развитието в ред на Лоран на функцията:

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2}$$

в областта $|z - 1| > 1$.

3 Трета тема

Задача 1. Изобразете областта $\mathbb{C} \setminus \{\overline{D}_0(1) \cup [-2,-1] \cup [1,2]\}$ в областта $\{\omega,\ \pi < \arg\omega < 3\pi/2\}$.

Задача 2. Нека функцията $f(z)$ е аналитична във вътрешността на затворения гладък контур Γ и върху него. Докажете, че за всяко $z_0 \notin \Gamma$ е валидно равенството:

$$\int_\Gamma \frac{f'(z_0)}{z-z_0}dz = \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz.$$

Задача 3. С помощта на теоремата за резидуумите докажете, че:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2(\theta)} = \pi\sqrt{2}.$$

Задача 4. Като използвате интегралната теорема на Коши, докажете че, ако функцията $f(z)$ е аналитична върху кръга $\overline{D}_a(r)$, то:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta.$$

Задача 5. Постройте функция, която има двукратна нула в точката $z=0$, проста нула в $z=1+2i$, съществена особеност в $z=1$ и прост полюс в $z=-1$.

Задача 6. Пресметнете:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}.$$

Задача 1. Изобразете областта $\mathbb{C} \setminus \{\overline{D}_0(1) \cup [-2,-1] \cup [1,2]\}$ в областта $\{\omega,\ \pi < \arg\omega < 3\pi/2\}$.

Решение. Задачата е подобна на тема 1, задача 4.

Имаме дадена цялата комплексна равнина без единичната окръжност и без отсечките $[-2,-1]$ и $[1,2]$.

Прилагаме функцията на Жуковски $\omega_1 = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ (дефиниция 8), като външността на единичния кръг се трансформира в цялата комплексна равнина, без отсечката $[-1,1]$, а единичният кръг се трансформира в отсечката $[-1,1]$. Сега да видим за отсечката $[1,2]$:

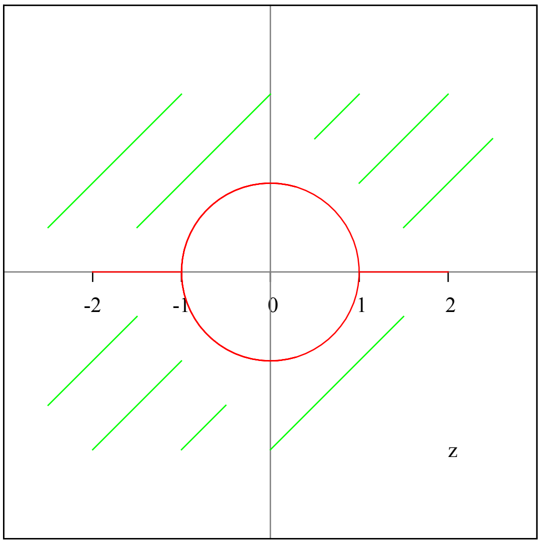
$$\omega_1(2) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{5}{2} = \frac{5}{4}.$$

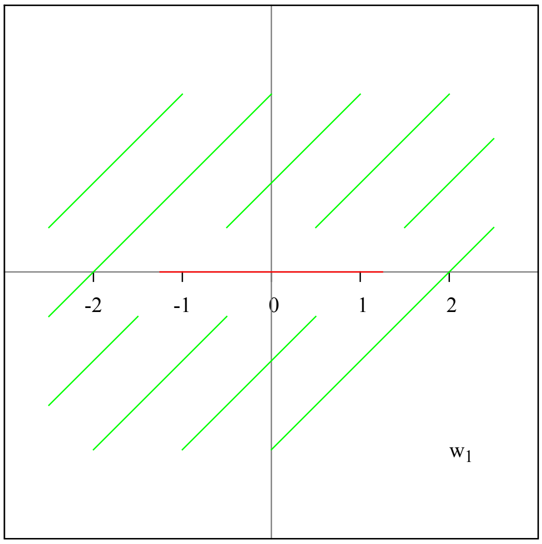
Нека да видим и едно число от тази отсечка:

$$\omega_1\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{13}{6} = \frac{13}{12}.$$

Което е съвсем малко вдясно от единицата. Аналогично и за $[-2,-1]$.

Следователно функцията ω_1 трансформира нашата област в цялата комплексна равнина без отсечката $[-5/4, 5/4]$.





Сега трябва да намерим дробно-линейна трансформация, която изпраща отсечката $[-5/4, 5/4]$ в положителната част на реалната права. Пробягваме отсечката $[-5/4, 5/4]$, като взимаме точките $-5/4$, 0, $5/4$ или $5/4$, 0, $-5/4$, в тази последователност.

Искаме резултатът от трансформацията да е положителната част на реалната права, можем да я представим с последователността от точки: 0, 1, ∞.

Както видяхме в предишната задача, е необходимо да изчислим само за една от последователностите:

$$(z, 5/4, 0, -5/4) \to (\omega, 0, 1, \infty).$$

Записваме двойното отношение на точките (от дефиниция 6):

$$\frac{z-5/4}{z-0} : \frac{-5/4-5/4}{-5/4-0} = \frac{\omega-0}{\omega-1} : \frac{1}{1}.$$

Както и преди, там където присъства безкрайност, заменяме с единица.

$$\frac{z-5/4}{z} : \frac{-10/4}{-5/4} = \frac{\omega}{\omega-1} \Longrightarrow \frac{z-5/4}{z}\frac{1}{2} = \frac{\omega}{\omega-1},$$

$$2z\omega = (z-5/4)(\omega-1) \Longrightarrow 2z\omega = z\omega - z - 5/4\omega + 5/4,$$

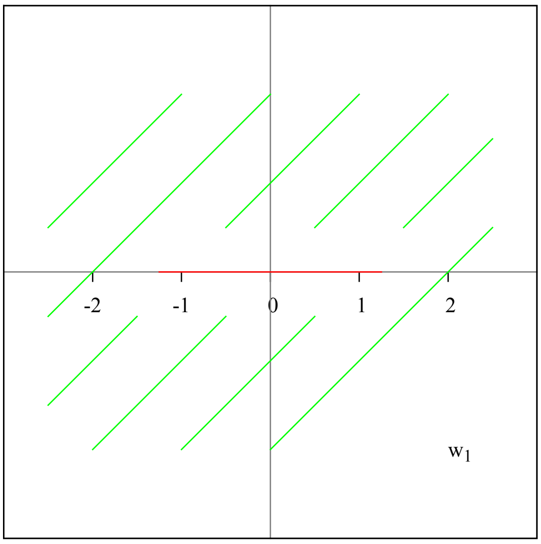
$$2z\omega - z\omega + 5/4\omega = 5/4 - z \Longrightarrow z\omega + 5/4\omega = 5/4 - z,$$

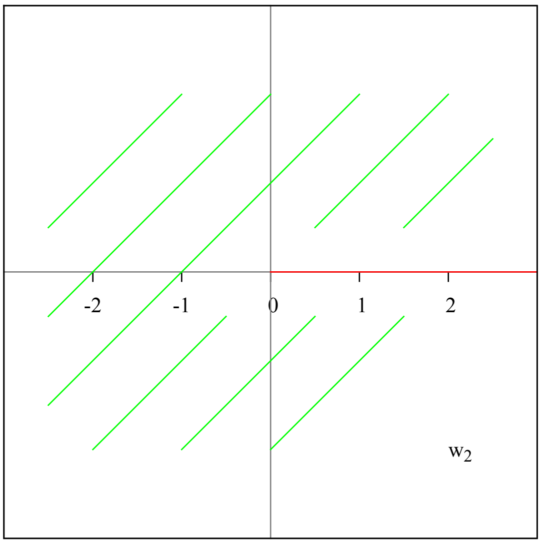
$$\omega(5/4+z) = 5/4 - z \Longrightarrow \omega = \frac{5/4-z}{5/4+z}.$$

Логично, получихме че $\omega = \dfrac{5/4-z}{5/4+z}$ изпраща отсечката $[-5/4, 5/4]$ в положителната част на реалната права, като в предишната задача получихме че $\omega = \dfrac{1-z}{1+z}$ изпраща отсечката $[-1, 1]$ в положителната част на реалната права.

Втората ни трансформация (спрямо първата ω_1) е:

$$\omega_2 = \frac{5/4-\omega_1}{5/4+\omega_1}.$$

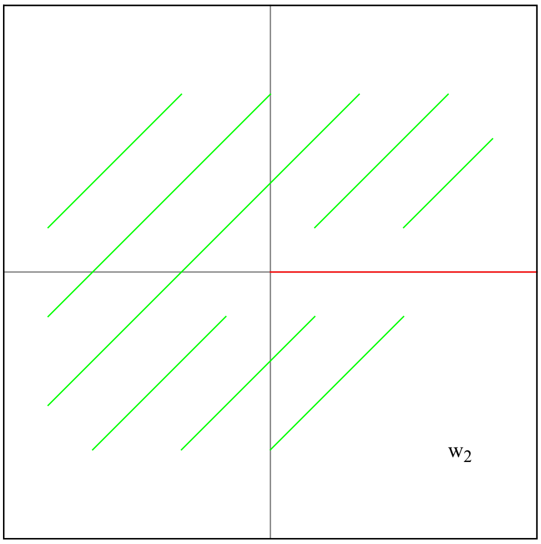


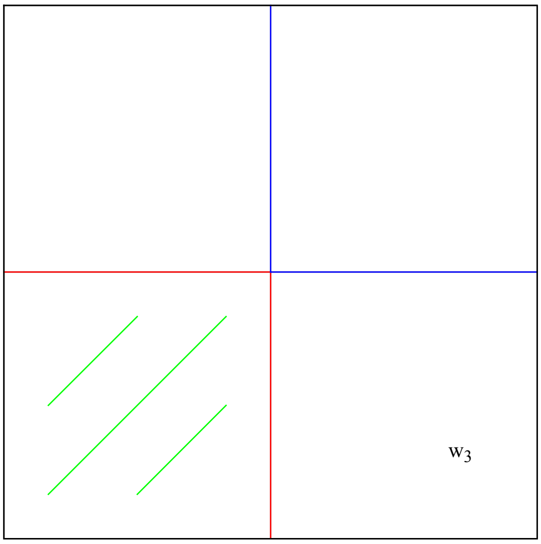


Останалата част от задачата е подобна на тема 1, задача 2.

Имаме цялата комплексна равнина и искаме да я изобразим в ъгъл с големина $3\pi/2 - \pi = \pi/2$, което е $1/4$ от комплексната равнина. Следователно функцията $\omega = z^{1/4}$ трансформира цялата комплексна равнина в $1/4$ от нея (дефиниция 3).

Ако сравним с предишната задача, тук имаме директно положителната част на реалната права, така че $\theta = n\varphi_0$ дава: $0 = 4\varphi_0$, $\varphi_0 = 0$. Клоновете на радикала започват директно от положителната част на реалната права.





Търсената област е защрихована в зелено, другите две области, които се получават при трансформацията, са ограничени от червените и сините лъчи.

Нека да определим клоновете на радикала (да пресметнем стойността на лъчите, дефиниция 3):

$$z^{1/n} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg(z) + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg(z) + 2k\pi}{n}\right).$$

Напомняме, че $\theta = \arg(z) = 0$. Заместваме с $n = 4$:

$$z^{1/4} = |z|^{1/4}\left(\cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}\right).$$

Нека $k = 0$:

$$z^{1/4} = |z|^{1/4}(\cos(0) + i\sin(0)).$$

Това е положителната част на реалната права, първия син лъч (определя първи квадрант). Сега $k = 1$:

$$z^{1/4} = |z|^{1/4}\left(\cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}\right) = |z|^{1/4}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Това е положителната част на имагинерната права, втория син лъч (определя втори квадрант). Сега $k = 2$:

$$z^{1/4} = |z|^{1/4}\left(\cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4}\right) = |z|^{1/4}(\cos(\pi) + i\sin(\pi)).$$

Сега вече сме на първия червен лъч, това е отрицателната част на реалната права, това е точно търсената област (трети квадрант). Но нека да видим и последната област при $k = 3$:

$$z^{1/4} = |z|^{1/4}\left(\cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4}\right) = |z|^{1/4}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Това е отрицателната част на имагинерната права, втория червен лъч (и определя областта от този червен лъч до първия син, това е точно четвърти квадрант).

Търсената област се намира чрез функцията $\omega = z^{1/4}$ с клона $k = 2$:

$$z^{1/4} = |z|^{1/4}\left(\cos\frac{\arg(z) + 4\pi}{4} + i\sin\frac{\arg(z) + 4\pi}{4}\right).$$

Следователно нашата трета трансформация (спрямо предишната ω_2) е:

$$\omega_3 = \omega_2^{1/4}\ (k = 2).$$

Решението на задачата е композиция от функциите:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),\ \omega_2 = \frac{5/4 - \omega_1}{5/4 + \omega_1},\ \omega_3 = \omega_2^{1/4}\ (k = 2),$$

(това са функция на Жуковски, дробно-линейна функция, радикал) и може да се запише така:

$$\omega = \omega_3 \circ \omega_2 \circ \omega_1(z).$$

При този запис функциите се прилагат отдясно наляво.

Проверка на задачата. Нека да вземем точката 3:

$$\omega_1(3) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{10}{9} = \frac{5}{3},$$

$$\omega_2(5/3) = \frac{5/4 - 5/3}{5/4 + 5/3} = \frac{15 - 20}{15 + 20} = -\frac{5}{35} = -\frac{1}{7},$$

сега да представим $-1/7$ в тригонометричен вид:

$$-\frac{1}{7} = \left|\frac{1}{7}\right|(\cos(\pi) + i\sin(\pi)),$$

$$\omega_3(-1/7) = \left|\frac{1}{7}\right|^{1/4}\left(\cos\frac{\pi + 4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{4}\right) = \left|\frac{1}{7}\right|^{1/4}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt[4]{7}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{7}} - i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{7}}.$$

Което е в търсената област. Решението на задачата е вярно. □

Задача 3. С помощта на теоремата за резидуумите докажете, че:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2(\theta)} = \pi\sqrt{2}.$$

Решение. Теорията е във файла по Висша Математика III.

Трябва да приложим теоремата за резидуумите, за целта трябва да сменим променливата на z.

Записваме комплексното число z чрез дефиниция 5:

$$z = |z|e^{i\arg(z)} = |z|e^{i\theta},$$

като при $|z| = 1$ и $\theta = \arg(z) \in [0, 2\pi]$ получаваме единичната окръжност. Границите на интеграла са от $-\pi$ до π, което като големина е пак 2π, избираме си радиуса да е единица: $|z| = 1$, тоест да интегрираме по цялата единична окръжност.

Следователно можем да запишем:

$$z = e^{i\theta},\ \theta \in [-\pi, \pi].$$

Диференцираме двете страни:

$$dz = d(e^{i\theta}) = ie^{i\theta}d\theta.$$

Значи трябва да умножим в числител и знаменател с $ie^{i\theta}$:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{i\theta}d\theta}{ie^{i\theta}(1+\sin^2(\theta))}.$$

Интегрираме по единичната окръжност, имаме:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d(e^{i\theta})}{ie^{i\theta}(1+\sin^2(\theta))} = \int_{C_0(1)} \frac{dz}{iz(1+\sin^2(\theta))}.$$

Сега остава да махнем и синуса. Формулата за синус е:

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - \frac{1}{e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2-1}{2iz}.$$

Трябва да повдигнем на квадрат:

$$\sin^2(\theta) = \left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2 = \frac{z^4-2z^2+1}{4i^2z^2}.$$

Добавяме и единицата:

$$1+\sin^2(\theta) = 1 + \frac{z^4-2z^2+1}{-4z^2} = \frac{-4z^2+z^4-2z^2+1}{-4z^2} = \frac{z^4-6z^2+1}{-4z^2}.$$

Заместваме обратно в интеграла:

$$I = \int_{C_0(1)} \frac{dz}{iz\frac{z^4-6z^2+1}{-4z^2}} = \int_{C_0(1)} \frac{-4z^2 dz}{iz(z^4-6z^2+1)} = -\frac{4}{i}\int_{C_0(1)} \frac{zdz}{z^4-6z^2+1}.$$

Подинтегралната функция е:

$$f(z) = \frac{z}{z^4-6z^2+1}.$$

Имаме еднократна нула в $z = 0$. Трябва да видим къде са полюсите. Записваме:

$$z^4 - 6z^2 + 1 = 0.$$

Това е биквадратен тричлен. Формулата за разлагане е:

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x^2 - t_1)(x^2 - t_2),$$

където t_1 и t_2 са корените на квадратното уравнение $at^2 + bt + c = 0$ при $t = x^2$. Тогава:

$$t^2 - 6t + 1 = 0,\ D = 32 = 2^5,\ t_{1,2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Разлагането е:

$$z^4 - 6z^2 + 1 = \left(z^2 - (3 + 2\sqrt{2})\right)\left(z^2 - (3 - 2\sqrt{2})\right).$$

Корените на уравнението са:

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{3 + 2\sqrt{2}},\ z_{3,4} = \pm\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}.$$

Чрез калкулатор или досещане:

$$z_1 = 2.414,\ z_2 = -2.414,\ z_3 = 0.414,\ z_4 = -0.414.$$

Областта на интегриране е вътрешността на единичната окръжност (защото се движим от $-\pi$ до π, вътрешността остава отляво), точките z_3 и z_4 са в окръжността:

$$z_3 = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}},\ z_4 = -\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}.$$

Това са еднократни полюси, сега трябва да изчислим резидуумите. Решението е:

$$I = 2\pi i\left(-\frac{4}{i}\right)(\mathrm{Res}[z = z_3] + \mathrm{Res}[z = z_4]) = -8\pi(\mathrm{Res}[z = z_3] + \mathrm{Res}[z = z_4]).$$

Това е множителя пред интеграла: $-4/i$, не трябва да го забравяме.

Изчисляваме резидуума в $z = z_3$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}[z = z_3] &= \lim_{z \to z_3} (z - z_3) \frac{z}{(z^2 - (3 + 2\sqrt{2}))(z - z_3)(z - z_4)} = \\
&= \lim_{z \to z_3} \frac{z}{(z^2 - 3 - 2\sqrt{2})(z - z_4)} = \\
&= \frac{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{((\sqrt{3 - 2\sqrt{2}})^2 - 3 - 2\sqrt{2})(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}})} = \\
&= \frac{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{(3 - 2\sqrt{2} - 3 - 2\sqrt{2})2\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} = -\frac{1}{8\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Сега и резидуума в $z = z_4$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}[z = z_4] &= \lim_{z \to z_4} (z - z_4) \frac{z}{(z^2 - (3 + 2\sqrt{2}))(z - z_3)(z - z_4)} = \\
&= \lim_{z \to z_4} \frac{z}{(z^2 - 3 - 2\sqrt{2})(z - z_3)} = \\
&= \frac{-\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{((-\sqrt{3 - 2\sqrt{2}})^2 - 3 - 2\sqrt{2})(-\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}})} = \\
&= \frac{-\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{(3 - 2\sqrt{2} - 3 - 2\sqrt{2})(-2)\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} = -\frac{1}{8\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Равни са, записваме отговора:

$$I = -8\pi \left(-\frac{1}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{8\sqrt{2}} \right) = \frac{16\pi}{8\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}.$$

Това и трябваше да докажем. □

Задача 5. Постройте функция, която има двукратна нула в точката $z = 0$, проста нула в $z = 1 + 2i$, съществена особеност в $z = 1$ и прост полюс в $z = -1$.

Решение. Записваме — двукратна нула: z^2 в числител; проста (еднократна) нула: $z - (1 + 2i)$ в числител; съществена особеност: $e^{\frac{1}{z-1}}$ в числител; прост (еднократен) полюс: $z - (-1)$ в знаменател:

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-1}} z^2 (z - 1 - 2i)}{z + 1} g(z).$$

Функцията $g(z)$ е аналитична в цялата комплексна равнина и различна от нула (за да остане нещо след всички тия нули и полюси :)

Относно съществената особеност: експоненциалната функция е винаги положителна, но ако се повдигне на степен безкрайност функцията клони към безкрайност: $e^{\infty} \to \infty$.

Ако сме в реалния анализ имаме $-\infty$ и $+\infty$, тогава: $e^{-\infty} \to 0$, $e^{+\infty} \to +\infty$. □

4 Четвърта тема

Задача 1. Намерете числата z, за които $\cos(z) = i\sin(z)$.

Задача 2. Докажете, че редицата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща тогава и само тогава, когато безкрайният ред $\sum_{n=0}^{\infty}(z - z_{n-1})$ е сходящ.

Задача 3. Докажете, че ако двете функции $f(z)$ и $|f(z)|$ са едновременно аналитични в областта D, то $f(z) \equiv \mathrm{Const}$; както и че ако двете функции $f(z)$ и $\overline{f}(z)$ са едновременно аналитични в областта D, то $f(z) \equiv \mathrm{Const}$.

Задача 4. Нека $f(z)$ е аналитична върху затворения кръг $\overline{K}$ и нека $|f(z) - 1| < 1$ за всяко $z \in \overline{K}$. Докажете, че $f(z)$ няма нули във вътрешността на кръга.

Задача 5. Определете стойността на интеграла:

$$\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

без да го пресмятате директно, като

$$f(z) = \frac{e^z z^2 (z-1)^3}{(z+2)(z-2)^2},$$

а контурът Γ е елипсата с фокуси ± 1, голяма полуос $5/4$ и малка полуос $3/4$.

Задача 6. Пресметнете:

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos(z)}{z^2(z-3)} dz,$$

като Γ е контурът, ограничаващ областта заключена между окръжностите $C_{-1}(2)$ и $C_{3/4}(1/4)$.

Задача 6. Пресметнете:
$$\int_\Gamma \frac{\cos(z)}{z^2(z-3)}dz,$$
като Γ е контурът, ограничаващ областта заключена между окръжностите $C_{-1}(2)$ и $C_{3/4}(1/4)$.

Решение. Подинтегралната функция е:
$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z^2(z-3)}.$$

Функцията има еднократни нули в $z = k\pi/2$, $k = \pm1, \pm3, \pm5, \ldots$, двукратен полюс в $z = 0$ и еднократен полюс в $z = 3$. Областта на интегриране е вътрешността на окръжност с радиус 2 и център $(-1, 0)$, без окръжност с радиус 0.25 и център $(0.75, 0)$. Интересуват ни полюсите: $z = 3$ е извън областта, но $z = 0$ е в областта.

Следователно имаме двукратен полюс в $z = 0$. Стойността на интеграла е:
$$I = 2\pi i \operatorname{Res}[z = 0].$$

Изчисляваме резидуума:
$$\operatorname{Res}[z=0] = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to0}\left[(z-0)^2\frac{\cos(z)}{z^2(z-3)}\right]^{(2-1)} = \lim_{z\to0}\left[\frac{\cos(z)}{z-3}\right]' =$$
$$= \lim_{z\to0}\frac{-\sin(z)(z-3)-\cos(z)}{(z-3)^2} = \lim_{z\to0}\frac{3\sin(z)-z\sin(z)-\cos(z)}{(z-3)^2} =$$
$$= \frac{0-0-1}{(0-3)^2} = -\frac{1}{9}.$$

Отговорът е:
$$I = 2\pi i\left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{2\pi i}{9}.$$

□

Задача 1. Намерете числата z, за които $\cos(z) = i\sin(z)$.

Решение. Формулите за синус и косинус са:
$$\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Заместваме:
$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \Longrightarrow e^{iz}+e^{-iz} = e^{iz}-e^{-iz} \Longrightarrow 2e^{-iz} = 0.$$

Уравнението няма решение, понеже $e^\alpha > 0$, за всяко α.

Освен когато имаме реално число $z = x$ и граничен преход при $x \to +\infty$:
$$\lim_{x\to+\infty} 2e^{-ix} = 0.$$

□

5 Пета тема

Задача 1. Намерете образа на правите $x = a$ и $y = b$ посредством трансформацията $\omega = \dfrac{z-a}{z-ib}$, като a и b са реални числа.

Задача 2. Намерете образа на полуивицата $\{z = x+iy,\ 0 \le x < \infty,\ 0 \le y \le \pi\}$ посредством трансформацията $\omega = \dfrac{e^z+1}{e^z-1}$.

Задача 3. Намерете образа на полуивицата $\{z = x+iy,\ -\infty < x < 1,\ -\pi \le y \le \pi\}$ посредством трансформацията $\omega = \dfrac{e^z-1}{e^z+1}$.

Задача 4. Аналитична ли е функцията $f(z) = |z|$? Обосновете отговора си.

Задача 5. За кои стойности на z е вярно $1^z = 1$? Обосновете отговора си.

Задача 6. Намерете общият вид на дробно-линейна трансформация, която да изпраща дясната полуравнина без кръга $|z-\sqrt{2}| \le 1$ върху венеца $1 \le |z| \le a$.

Задача 7. Покажете, че ако $f(z)$ и $|f(z)|$ са едновременно аналитични в областта D, то $f(z) \equiv \mathrm{Const}$.

Задача 1. Намерете образа на правите $x = a$ и $y = b$ посредством трансформацията $\omega = \dfrac{z-a}{z-ib}$, като a и b са реални числа.

Решение. Имаме дадена трансформацията:

$$\omega = \frac{z-a}{z-ib}.$$

Нека първо да видим червената права през $x = a$. Избираме си три точки от нея: a, $a+ib$, ∞, и намираме трансформациите:

$$\omega(a) = \frac{a-a}{a-ib} = 0,\ \omega(a+ib) = \frac{a+ib-a}{a+ib-ib} = \frac{ib}{a} = i\frac{b}{a},\ \omega(\infty) = 1.$$

Дробно-линейна трансформация от безкрайност ∞ е винаги единица.

Получихме точките 0, ib/a, 1, които не лежат на една права, но лежат на окръжност. Центърът на окръжността лежи на средата на хипотенузата:

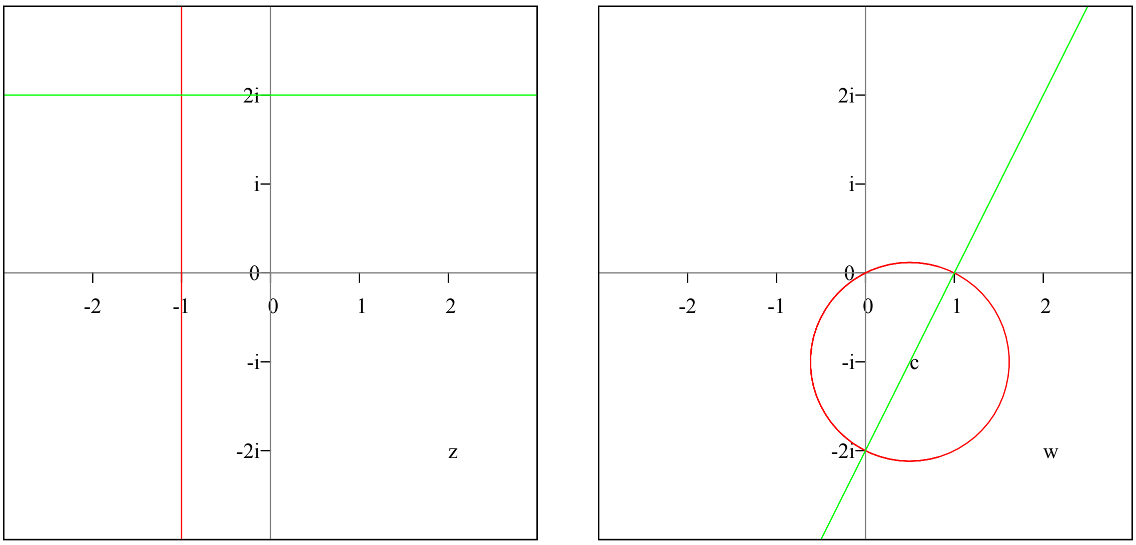
$$h = \sqrt{1^2 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|a|}.$$

Радиусът е половината от хипотенузата:

$$r = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2|a|}.$$

Единият катет в задачата е винаги от 0 до 1, и в правоъгълния триъгълник медианата към хипотенузата е равна на половината от хипотенузата, следователно центърът е в точката

$$c = \left(\frac{1}{2}, \frac{i|b|}{2|a|}\right).$$



Графиката е начертана с $a = -1$, $b = 2$, откъдето следва че

$$h = \sqrt{5},\ r = \frac{\sqrt{5}}{2},\ c = \left(\frac{1}{2}, \frac{i|2|}{2|-1|}\right) = (0.5, i).$$

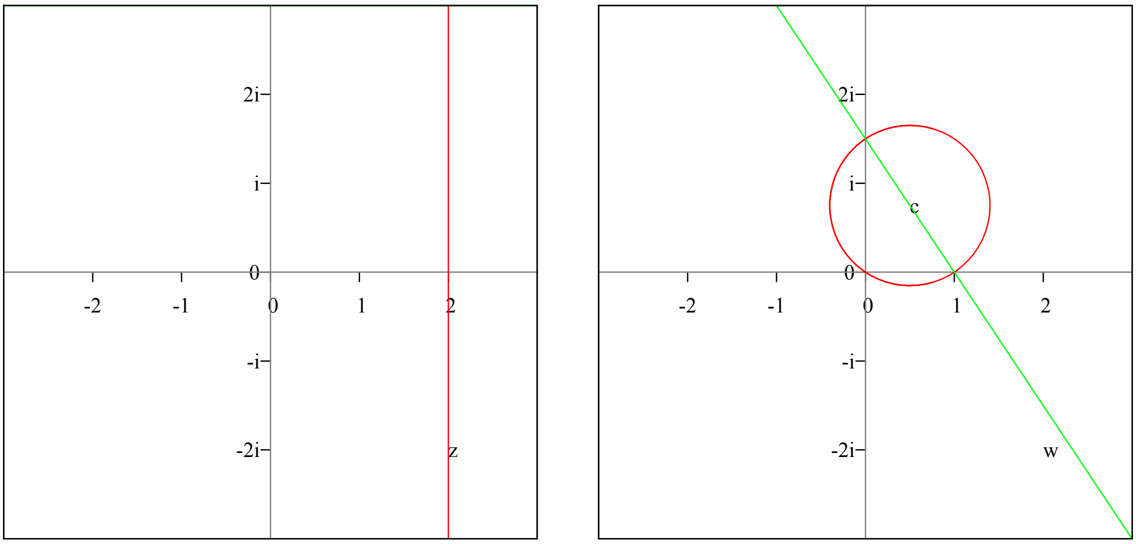
Сега и за зелената права през $y = b$. Избираме си три точки от нея: $a + ib$, ib, ∞. Намираме трансформациите:

$$\omega(a+ib) = \frac{a+ib-a}{a+ib-ib} = \frac{ib}{a} = i\frac{b}{a},\ \omega(ib) = \frac{ib-a}{ib-ib} = \infty,\ \omega(\infty) = 1.$$

Получихме точките ib/a, ∞, 1. Две от тях лежат на една права, а безкрайната точка лежи където си иска, така че трите точки лежат на една права. Тази права, както се вижда на графиката, минава през центъра на окръжността (определена от предишната трансформация).

Следователно функцията $\omega = \dfrac{z-a}{z-ib}$, при a и b реални числа, трансформира правата $x = a$ в окръжност през точките 0, 1, ib/a, и трансформира правата $y = b$ в права през точките 1, ib/a и центъра на окръжността.

Ако права минава през центъра на окръжност, то се казва, че правата и окръжността са перпендикулярни.



Графиката е начертана с $a = 2$, $b = 3$ (всички графики се чертаят с граници $[-3, 3]$, затова b не се вижда), откъдето следва че

$$h = \frac{\sqrt{13}}{2},\ r = \frac{\sqrt{13}}{4},\ c = \left(\frac{1}{2}, \frac{i|3|}{2|2|}\right) = (1/2, i3/4) = (0.5, i0.75).$$

Проверка на задачата. Нека $a = 1$ и $b = 1$. Тогава трансформацията е:

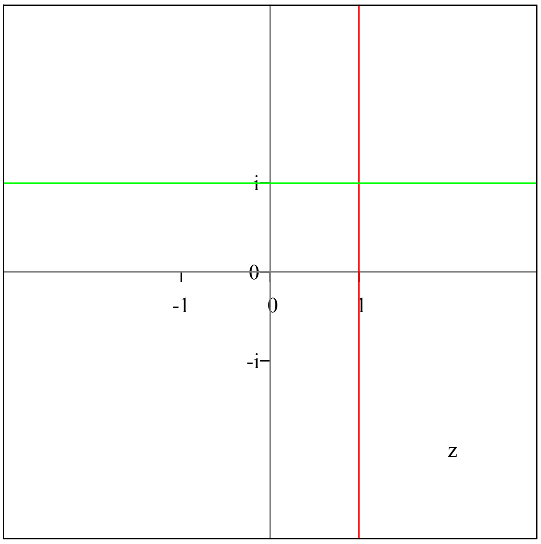
$$\omega = \frac{z-1}{z-i}.$$

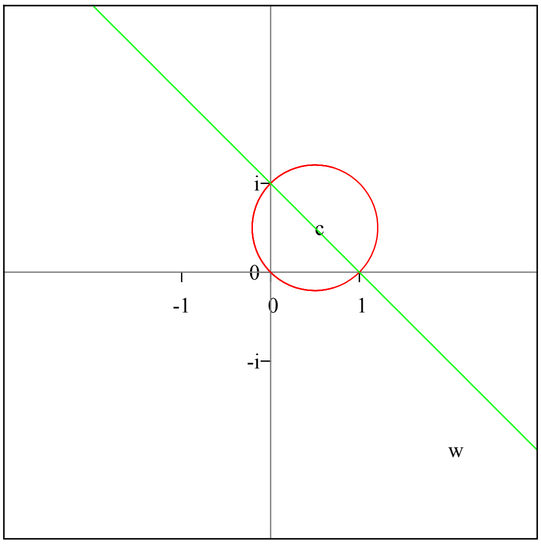
Червената права е през $x = 1$. Взимаме три точки от нея: 1, $1 + i$, ∞. Намираме трансформациите:

$$\omega(1) = \frac{1-1}{1-i} = 0,\ \omega(1+i) = \frac{1+i-1}{1+i-i} = i,\ \omega(\infty) = 1.$$

Дробно-линейна трансформация от безкрайност ∞ е винаги единица.

Получихме точките 0, i, 1, които не лежат на една права. Следователно лежат на окръжност, с център $(1/2, 1/2)$ и радиус $\sqrt{2}/2$.





Зелената права през $y = 1$. Взимаме три точки: $1 + i$, i, ∞ и намираме трансформациите:

$$\omega(1+i) = \frac{1+i-1}{1+i-i} = i,\ \omega(i) = \frac{i-1}{i-i} = \infty,\ \omega(\infty) = 1.$$

Получихме точките i, ∞, 1. И трите лежат на една права, която минава през центъра на окръжността.

Червената права се трансформира в червената окръжност, а зелената права се трансформира в зелената права :)

Задачата е решена при $a = -1$, $b = 2$; $a = 2$, $b = 3$; $a = 1$, $b = 1$. □

Задача 2. Намерете образа на полуивицата $\{z = x + iy,\ 0 \leq x < \infty,\ 0 \leq y \leq \pi\}$ посредством трансформацията $\omega = \dfrac{e^z + 1}{e^z - 1}$.

Решение. Имаме дадена половината от ивица, успоредна на реалната права, с широчина π. Също така ни е дадена и композицията от функции:

$$\omega_1 = e^z,\ \omega_2 = \frac{\omega_1 + 1}{\omega_1 - 1}.$$

Първата трансформация е показателната функция $\omega_1 = e^z$ Сега да видим какъв е резултатът от нея.

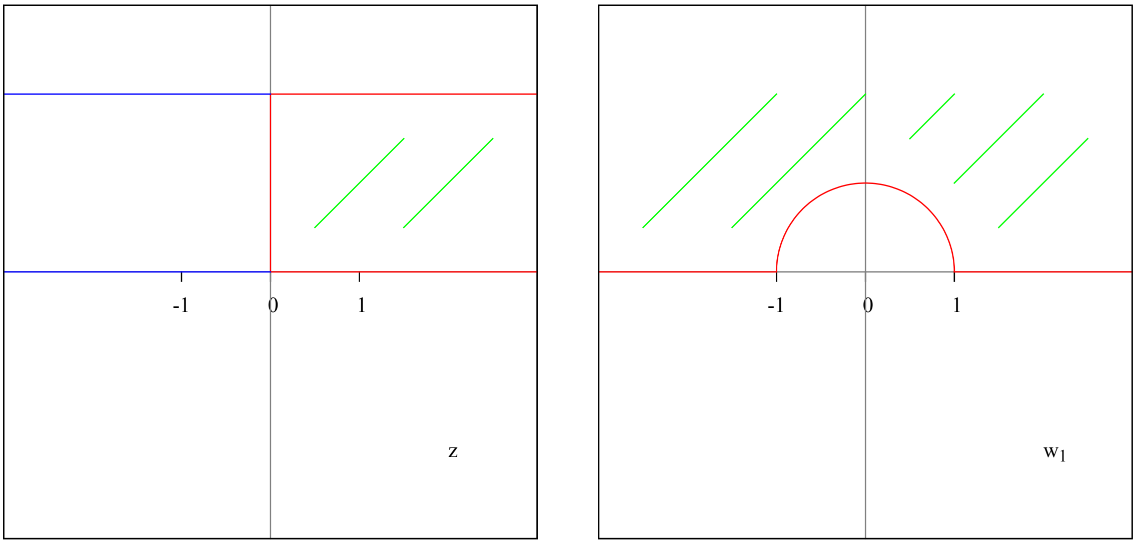
Ако имаме цяла ивица с широчина π, то функция $\omega = e^z$ (дефиниция 2) трансформира тази ивица с ъгъл с големина π (започвайки от положителната част на реалната права), което е горната полуравнина.

Но ние сме ограничени от отсечката $[0, i\pi]$. Нека да изчислим няколко стойности от тази отсечка:

$$e^0 = 1,\ e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = 0 + i = i,\ e^{i\pi} = -1.$$

Получихме точките 1, i, -1, които лежат на единичната окръжност. Но след точката $e^{i\pi} = -1$ границата на ивицата се връща наобратно (горната червена права), така че имаме само горната полуокръжност.

Началната ни област е полуивицата, а след първата трансформация получаваме горната полуравнина без горната единична полуокръжност.



Втората трансформация е $\omega_2 = \dfrac{\omega_1 + 1}{\omega_1 - 1}$.

Разглеждаме следната дробно-линейна функция (дефиниция 6):

$$\omega = \frac{z+1}{z-1}.$$

Нека да разгледаме цялата горна полуравнина и да вземем три точки, така че тя да остава отляво, примерно: -1, 0, 1 и направим трансформациите, получаваме:

$$\omega(-1) = \frac{-1+1}{-1-1} = 0,\ \omega(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1,\ \omega(1) = \frac{1+1}{1-1} = \infty.$$

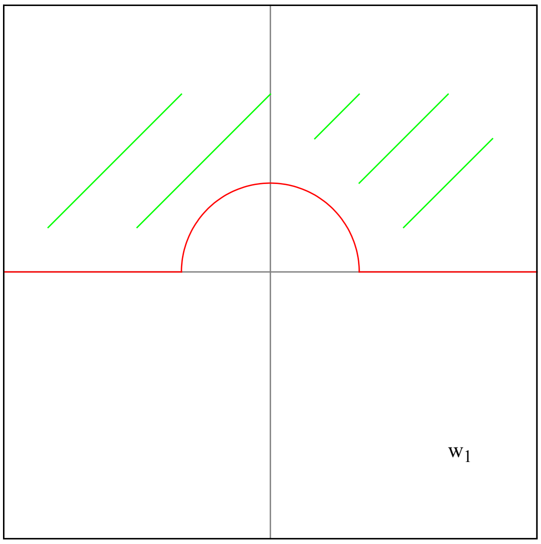
Получихме 0, -1, ∞, което е долната полуравнина, ограничена от реалната права.

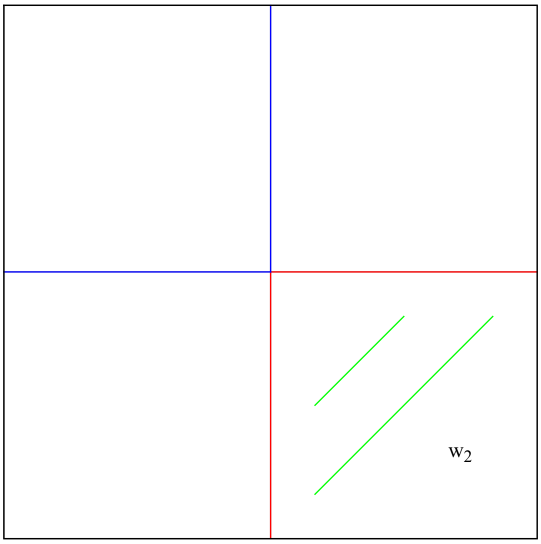
Сега нека да разгледаме единичната окръжност, като вземем три точки от нея, така че външността на единичната окръжност да остава отляво: -1, i, 1 и направим трансформациите (две от тях вече изчислихме):

$$\omega(i) = \frac{i+1}{i-1} = -\frac{1+i}{1-i} = -\frac{(1+i)^2}{1-i^2} = -\frac{1+2i+i^2}{1+1} = -\frac{2i}{2} = -i.$$

Получихме 0, $-i$, ∞, което е дясната полуравнина, ограничена от имагинерната права.

Следователно като засечем тези две области: долната полуравнина и дясната полуравнина, получаваме четвърти квадрант от координатната система.





Изглежда доста сложно, защото имаме горната полуравнина без половин окръжност, затова трябваше да видим трансформация от горната полуравнина и от външността на единичния кръг: горната полуравнина отива в долната, а външността на единичния кръг отива в дясната полуравнина.

Функцията $\omega = \dfrac{e^z+1}{e^z-1}$ трансформира полуивица с широчина π, успоредна на реалната права, в четвърти квадрант на координатната система.

Проверка на задачата. Нека да вземем точката $z = 1+i\pi/2$ (трябва да е вътрешна точка):

$$\omega_1(1+i\pi/2) = e^{1+i\pi/2} = e^1 e^{i\pi/2} = e\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = e(0+i) = ie,$$

което е в областта на ω_1, сега и ω_2:

$$\omega_2(ie) = \frac{ie+1}{ie-1} = -\frac{1+ie}{1-ie} = -\frac{(1+ie)^2}{1-i^2e^2} = -\frac{1+2ie+i^2e^2}{1+e^2} = -\frac{1+2ie-e^2}{e^2+1} =$$
$$= \frac{-1-2ie+e^2}{e^2+1} = \frac{e^2-1}{e^2+1} - i\frac{2e}{e^2+1} = 0.761 - i0.648.$$

Което е в търсената област. Решението на задачата е вярно. □

Задача 3. Намерете образа на полуивицата $\{z = x+iy,\ -\infty < x < 1,\ -\pi \le y \le \pi\}$ посредством трансформацията $\omega = \dfrac{e^z-1}{e^z+1}$.

Решение. Тази задача е подобна на предишната тема 5, задача 2, и без нейното прочитане трудно може да се разбере сегашната задача.

Нека имаме ивица с широчина 2π, успоредна на реалната права. Функция $\omega = e^z$ трансформира тази ивица в цялата комплексна равнина (дефиниция 2). Полуивицата при $x > 0$ се трансформира във външността на единичния кръг, а полуивицата при $x < 0$ се трансформира във вътрешността на единичния кръг.

В предишната задача широчината на ивицата беше π, затова имахме изрязана половин окръжност.

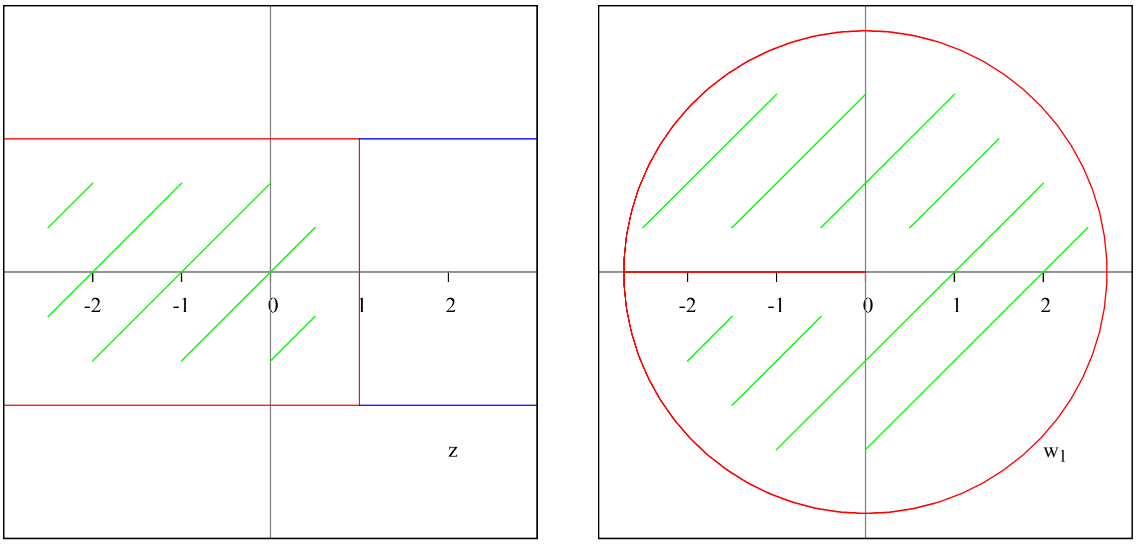
Сега имаме дадена ивица с граница през $x = 1$, ивицата при $x > 1$ ще се трансформира във външността на кръг с радиус $e = 2.71828$ (с център в началото на координатната система), ивицата при $x < 1$ ще се трансформира във вътрешността на същия кръг, а самата права $x = 1$ от $-\pi$ до π ще се трансформира в самата окръжност.

Ивицата е ограничена от правите $y = -\pi$ и $y = \pi$, което означава че трансформацията сключва ъгъл $\varphi_0 = -\pi$ с положителната част на реалната права (дефиниция 2), а широчината на ивицата е $h = \pi - (-\pi) = 2\pi$.

В предишната задача ивицата беше ограничена от $y = 0$ и $y = \pi$, като сключваше нулев ъгъл с положителната част на реалната права.

Следователно за граница на трансформацията имаме и отсечката $[-e, 0]$, тъй като тази отсечка сключва ъгъл $-\pi$ с положителната част на реалната права.

Функцията $\omega = e^z$ трансформира дадената ивица във вътрешността на централна окръжност с радиус e, без отсечката $[-e, 0]$.



Следващата трансформация е: $\omega_2 = \dfrac{\omega_1 - 1}{\omega_1 + 1}$.

Нека да разгледаме функцията:

$$\omega = \frac{z-1}{z+1}.$$

Сега взимаме три точки от окръжността, така че вътрешността да остава отляво, примерно: e, ie, $-e$, и изчисляваме трансформациите:

$$\begin{aligned}
\omega(e) &= \frac{e-1}{e+1} = 0.462,\\
\omega(ie) &= \frac{ie-1}{ie+1} = -\frac{1-ie}{1+ie} = -\frac{(1-ie)^2}{1-i^2e^2} = -\frac{1-2ie+i^2e^2}{1+e^2} = -\frac{1-2ie-e^2}{e^2+1} = \\
&= \frac{-1+2ie+e^2}{e^2+1} = \frac{e^2-1}{e^2+1} + i\frac{2e}{e^2+1} = 0.761 + i0.648,\\
\omega(-e) &= \frac{-e-1}{-e+1} = \frac{e+1}{e-1} = 2.164.
\end{aligned}$$

Получихме точките 0.462, $0.761 + i0.648$, 2.164, които не лежат на една права, следователно лежат на окръжност, и определят външността на тази окръжност (тъй като външността остава отляво при движението ни по точките).

Трябва да определим центъра на окръжността. За целта изчисляваме трансформацията през четвъртата "лесна" точка от окръжността: $-ie$ (комплексно спрегнатото число на ie):

$$\begin{aligned}
\omega(-ie) &= \frac{-ie-1}{-ie+1} = -\frac{1+ie}{1-ie} = -\frac{(1+ie)^2}{1-i^2e^2} = -\frac{1+2ie+i^2e^2}{1+e^2} = -\frac{1+2ie-e^2}{e^2+1} = \\
&= \frac{-1-2ie+e^2}{e^2+1} = \frac{e^2-1}{e^2+1} - i\frac{2e}{e^2+1} = 0.761 - i0.648.
\end{aligned}$$

Което е комплексно спрегнатото число на $\omega(ie) = 0.761 + i0.648$. Тези две точки са на равни разстояния от реалната права, следователно центъра на окръжността лежи на реалната права.

Изваждаме двете точки лежащи на реалната права и получаваме диаметъра на окръжността:

$$d = \omega(-e) - \omega(e) = \frac{-e-1}{-e+1} - \frac{e-1}{e+1} = \frac{4e}{e^2-1} = 1.702.$$

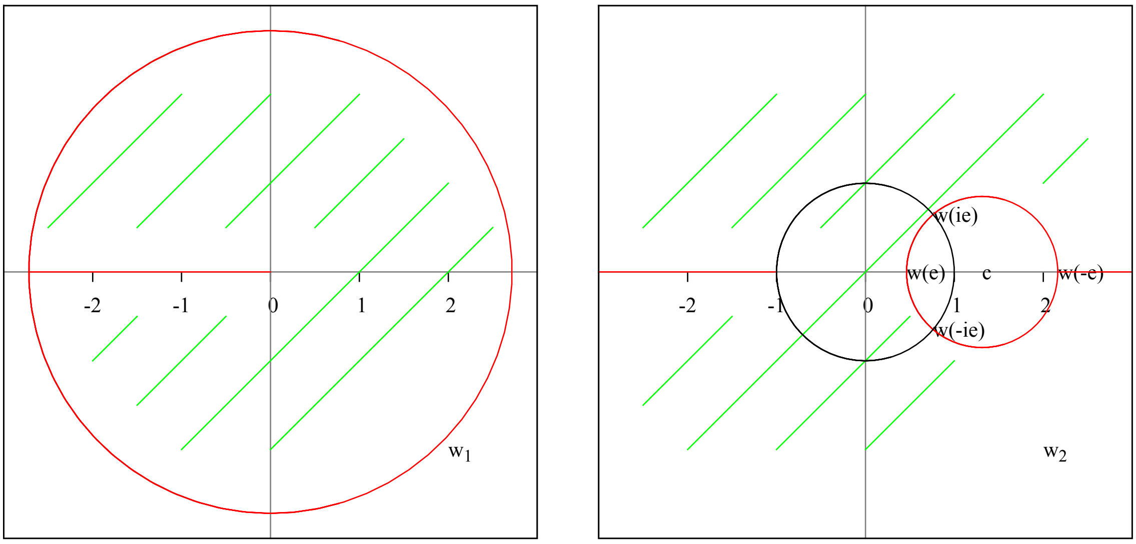
Разделяме на две и получаваме радиуса на окръжността:

$$r = \frac{2e}{e^2-1} = 0.851.$$

Сега събираме този радиус с по-близката до началото на координатната система точка и получаваме центъра на окръжността:

$$c = \omega(e) + r = 0.462 + 0.851 = 1.313.$$

Функцията $\omega = \dfrac{z-1}{z+1}$ трансформира вътрешността на централната окръжност с радиус e във външността на окръжност с радиус 0.851 и център $(1.313, 0)$.



Единичната окръжност (в черно) е дадена за ориентир, също така точките $\omega(ie)$ и $\omega(-ie)$ са пресечните точки на единичната окръжност и търсената окръжност.

Сега остава да трансформираме отсечката $[-e, 0]$.

При трансформация на полуивица $(x < 0)$ *с тази широчина* (2π) *отсечката* $[-1, 0]$ *се трансформира в* $(\infty, -1]$, *понеже при* $\omega = \dfrac{z-1}{z+1}$: $\omega(-1) = \infty$, $\omega(0) = -1$, *но ако не знаем това трябва да пробваме с различни стойности докато стигнем до този извод.*

Единственият начин е да пробваме с различни стойности, докато стигнем до нещо смислено. Важните точки от отсечката $[-e, 0]$ са три: $-e$, -1, 0:

$$\begin{aligned} \omega(-e) &= \frac{e+1}{e-1} = 2.164, \\ \omega(-1) &= \infty, \\ \omega(0) &= \frac{0-1}{0+1} = -1. \end{aligned}$$

Нека да вземем няколко стойности от отсечката $[-e, -1]$:

$$\omega(-2.5) = \frac{-2.5-1}{-2.5+1} = 2.33, \ \omega(-2) = \frac{-2-1}{-2+1} = 3, \ \omega(-1.5) = \frac{-1.5-1}{-1.5+1} = 5.$$

Сега нека да вземем няколко стойности от отсечката $[-1, 0]$:

$$\omega(-1/2) = \frac{-1/2-1}{-1/2+1} = -3, \ \omega(-1/3) = \frac{-1/3-1}{-1/3+1} = -2, \ \omega(-1/4) = \frac{-1/4-1}{-1/4+1} = -\frac{5}{3}.$$

Следователно отсечката $[-e, -1]$ се трансформира в $[2.164, \infty)$, а отсечката $[-1, 0]$ се трансформира в $(\infty, -1]$.

Като цяло отсечката $[-e, 0]$ се трансформира в $[2.164, -1]$ като минава през безкрайната точка:

$$2.164 \to \infty \to -1.$$

Това е възможно, защото в комплексния анализ има само една безкрайна точка. Ако има две, значи сме преминали в реалния анализ :)

Функцията $\omega = \dfrac{e^z - 1}{e^z + 1}$ трансформира ивица с широчина 2π, при $x < 1$, успоредна на реалната права, във външността на окръжност с радиус 0.851 и център $(1.313, 0)$, без отсечките $(\infty, -1]$ и $[2.164, \infty)$.

Проверка на задачата. Нека да вземем точката $z = i\pi/2$:

$$\omega_1(i\pi/2) = e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i = i,$$

$$\omega_2(i) = \frac{i-1}{i+1} = -\frac{1-i}{1+i} = -\frac{(1-i)^2}{1-i^2} = -\frac{1-2i+i^2}{2} = i.$$

Което е в търсената област. Решението на задачата е вярно. $\square$

Задача 6. Намерете общият вид на дробно-линейна трансформация, която да изпраща дясната полуравнина без кръга $|z - \sqrt{2}| \leq 1$ върху венеца $1 \leq |z| \leq a$.

Решение. Модулът $|z - \sqrt{2}| \leq 1$ означава окръжност с радиус единица и център $(\sqrt{2}, 0)$. Имаме дадена дясната полуравнина без тази окръжност.

Трябва да намерим двойката точки, инверсни спрямо окръжността и имагинерната права.

Нека първо спрямо окръжността с център $c = \sqrt{2}$ и радиус $R = 1$ (дефиниция 7):

$$z^* = \sqrt{2} + \frac{1^2}{\overline{\overline{1-\sqrt{2}}}} = \sqrt{2} + \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-2+1}{1-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = -1.$$

Следователно точката $z^* = -1$ е инверсната точка на $z = 1$. Да видим и наобратно, ако $z = -1$, тогава z^*:

$$z^* = \sqrt{2} + \frac{1^2}{\overline{\overline{-1-\sqrt{2}}}} = \sqrt{2} + \frac{1}{-1-\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}-2+1}{-1-\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}-1}{-\sqrt{2}-1} = 1.$$

Сега спрямо имагинерната права. И двете точки 1, -1 са на реалната права, свързващата ги права ще минава през началото на координатната система: $c = 0$, положителната част на имагинерната права сключва ъгъл $\theta = \pi/2$ с положителната част на реалната права (дефиниция 7):

$$z^* = 0 + e^{i2\pi/2}(\overline{1-0}) = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1.$$

Получихме инверсната точка $z^* = -1$ на $z = 1$. Да видим и за $z = -1$:

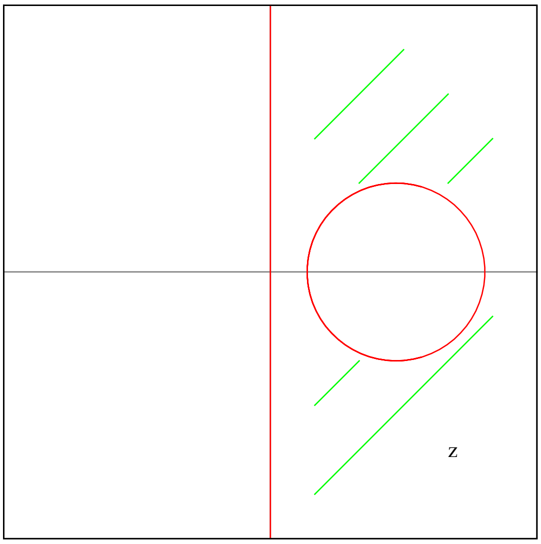
$$z^* = 0 + e^{i2\pi/2}(\overline{-1-0}) = -e^{i\pi} = -(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = (-1)(-1) = 1.$$

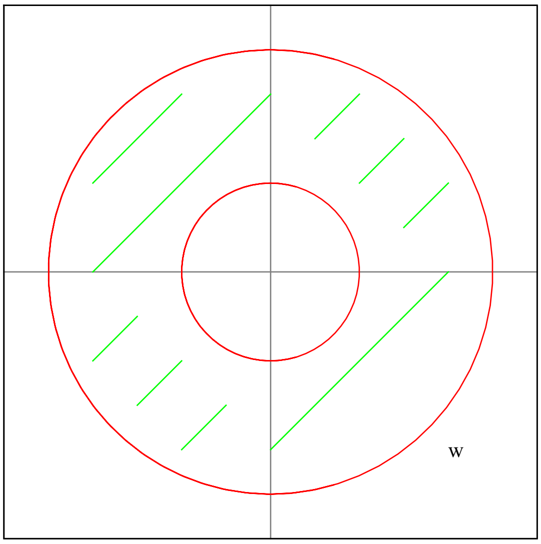
Следователно точките $z = 1$ и $z = -1$ са взаимно инверсни спрямо имагинерната права и окръжността, при това едновременно.

Тогава дробно-линейна функция от двете инверсни точки е:

$$\omega = \lambda \frac{z-1}{z+1}, \ |\lambda| = a.$$

Функцията $\omega = \dfrac{z-1}{z+1}$ трансформира дясната полуравнина във външността на единичния кръг, и трансформира външността на окръжността $|z-\sqrt{2}| \leq 1$ във вътрешността на някаква окръжност, която при $|\lambda| = a$ би трябвало да създаде търсената област (ние искаме венеца между единичната окръжност и окръжност с радиус a).





Проверка на задачата. Нека да вземем точката 3, $a = \lambda = 2$:

$$\omega(3) = \lambda \frac{z-1}{z+1} = 2\frac{3-1}{3+1} = 2\frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Което е в търсената област. Решението на задачата е вярно, но все пак подлежи на потвърждение. $\square$

6 Шеста тема

Задача 1. Да се намери аналитичната функция $f(z)$, такава че:

$$\Im f(z) = v(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

като а) $f(2) = 0$; б) $f(2) = i$.

Задача 2. Изобразете областта $\overline{D}_0(1) \setminus [i/2, i]$ върху областта $\overline{D}_0(1)$.

Задача 3. С помощта на теоремата за резидуумите пресметнете интеграла:

$$I = \int_{C_3(4)} \frac{z}{1 - \cos(z)} dz.$$

Задача 4а. Като използвате интегралната формула на Коши, докажете че, ако функцията $f(z)$ е аналитична върху кръга $\overline{D}_a(r)$ и има представянето в ред на Тейлор

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - a)^n,$$

то

$$f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n (z - a)^n = \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n (z - a)^n \frac{1}{2\pi} \int_{C_a(r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta.$$

Задача 4б. Нека функцията $f(z)$ е аналитична върху кръга $\overline{D}_0(r)$ с изключение на точката $z = 0$, където има изолирана особеност. Нека производната да има развитието в ред на Тейлор

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Възможно ли е $c_{-1} \neq 0$? Да се определи резидуума в нулата: $\mathrm{Res}(f, 0)$.

Задача 5а. Нека $f(z)$ има нула в точката $z = a$ от кратност m. Да се докаже че, тогава и само тогава функцията $1/f(z)$ има полюс в същата точка от същата кратност.

Задача 5б. Нека функцията $f(z)$ има вида $f = \varphi/\psi$, като функцията $\varphi \neq 0$ в околност на точката $z = a$, а функцията ψ има еднократна нула в същата точка. Да се докаже, че:

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Задача 6а. Пресметнете:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^n}.$$

Задача 6б. Пресметнете:

$$I = \int_\Gamma \frac{\sqrt{z}}{z^2+4z+3}dz,$$

като контурът Γ е границата на областта D, състояща се от кръга $D_0(2)$ с извадена отсечка $[0,2]$, обиколена два пъти; а еднозначният клон на функцията $\sqrt{z}$ се определя от условието $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$.

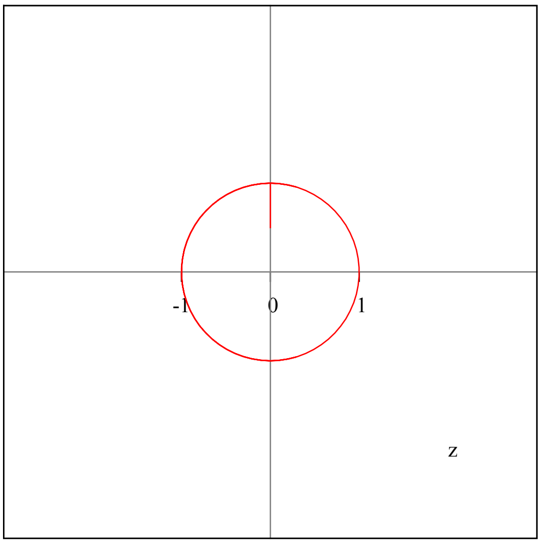
Задача 2. Изобразете областта $\overline{D}_0(1) \setminus [i/2, i]$ върху областта $\overline{D}_0(1)$.

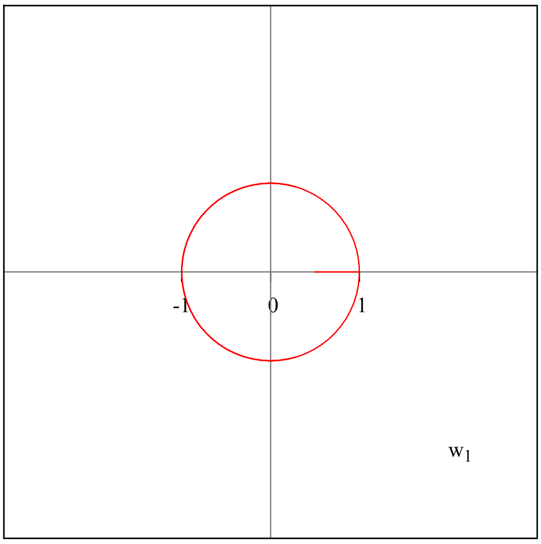
Решение. Имаме вътрешността на единичният кръг без отсечката $[i/2, i]$. Идеята е следната: трябва да приложим функцията на Жуковски, за да отидем в комплексната равнина, и после да направим обратната функция на Жуковски, за да се върнем обратно във вътрешността на единичния кръг.

Първо трябва да направим ротация на ъгъл $3\pi/2$ или $-\pi/2$ за да отиде отсечката $[i/2, i]$ в $[1/2, 1]$ (може и на ъгъл $\pi/2$ за да отиде в $[-1, -1/2]$).

Нека ротацията да е на ъгъл $-\pi/2$, и от дефиниция 5 получаваме нашата първа трансформация:

$$\omega_1 = e^{-i\pi/2}z.$$





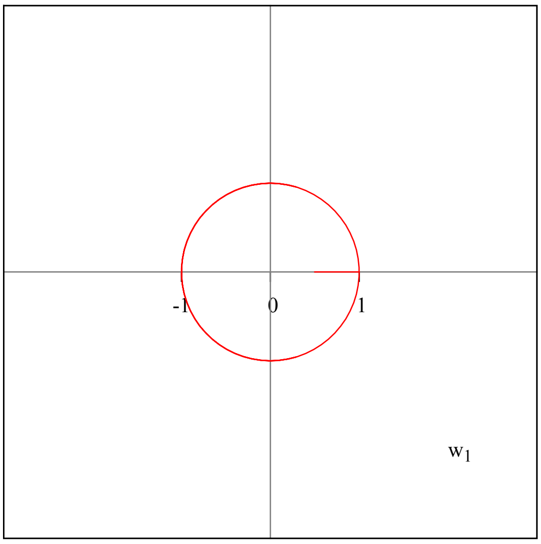
Сега вече можем да приложим функцията на Жуковски (дефиниция 8), при която вътрешността на единичния кръг се трансформира във цялата комплексна равнина без отсечката $[-1, 1]$. Но ние имаме и отсечката $[1/2, 1]$. Взимаме няколко стойности:

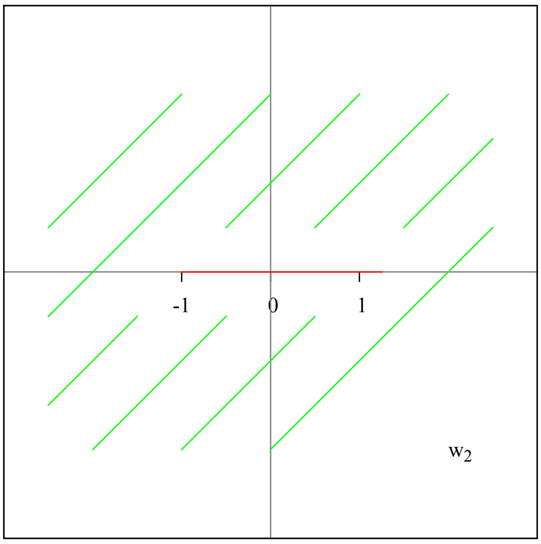
$$\omega\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+2\right) = \frac{1}{2}\frac{5}{2} = \frac{5}{4}, \ \omega\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{13}{6} = \frac{13}{12}.$$

Следователно отсечката $[1/2, 1]$ се трансформира в отсечката $[1, 5/4]$.

Чрез втората ни трансформация получаваме цялата комплексна равнина без отсечката $[-1, 5/4]$:

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\left(\omega_1 + \frac{1}{\omega_1}\right).$$





Сега трябва да "преместим" отсечката $[-1, 5/4]$ в отсечката $[-1, 1]$. Можем да направим преместването с линейна функция (дефиниция 5):

$$\omega = az + b.$$

Искаме точката -1 да отиде в -1, а точката $5/4$ в 1:

$$\omega(-1) = -1, \; \omega(5/4) = 1.$$

Записваме системата от двете уравнения и я решаваме:

$$\left| \begin{array}{l} -a + b = -1 \\ 5a/4 + b = 1 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} a - b = 1 \\ 5a/4 + b = 1 \end{array} \right.$$

Умножихме първото уравнение с -1, сега ги събираме:

$$\frac{5a}{4} + a = 2 \Longrightarrow 5a + 4a = 8 \Longrightarrow a = \frac{8}{9}.$$

Заместваме в първото уравнение:

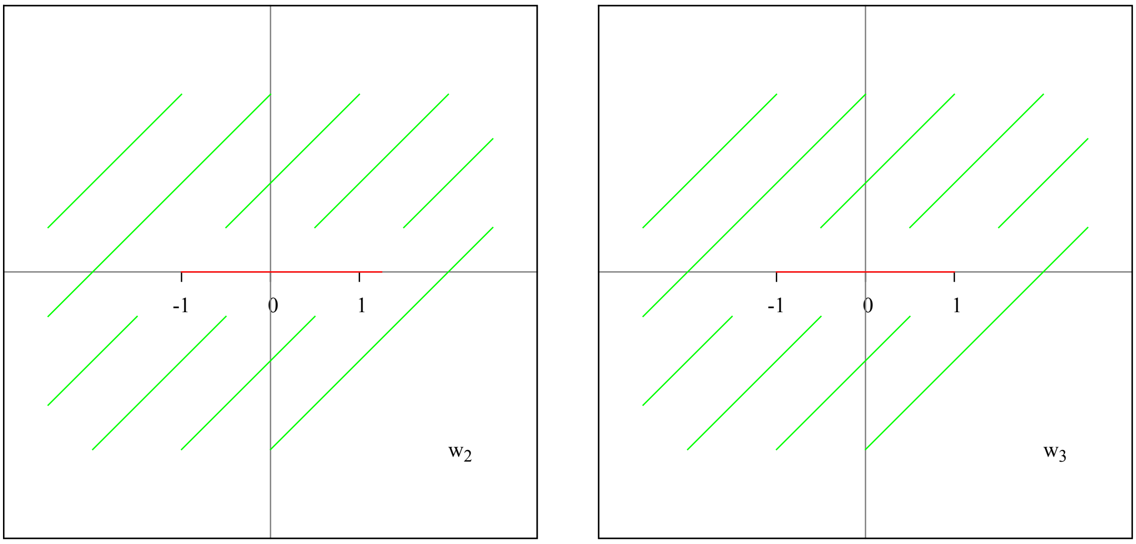
$$-\frac{8}{9} + b = -1 \Longrightarrow b = -1 + \frac{8}{9} \Longrightarrow b = -\frac{1}{9}.$$

Получаваме:

$$\omega = \frac{8}{9}z - \frac{1}{9}.$$

Следователно можем да запишем нашата трета трансформация (която изобразява цялата комплексна равнина без отсечката $[-1, 5/4]$ в цялата комплексна равнина без отсечката $[-1, 1]$):

$$\omega_3 = \frac{8}{9}\omega_2 - \frac{1}{9}.$$



Сега остава да приложим обратната функция на Жуковски, за да се върнем в единичната окръжност.

Записваме обратната функция на Жуковски (дефиниция 9):

$$\omega = z + \sqrt{z^2-1} = z + |z^2-1|^{1/2} e^{\frac{i\arg(z-1)}{2}} e^{\frac{i\arg(z+1)}{2}} e^{k\pi i}.$$

Взимаме стойност от комплексна равнина (без отсечката $[-1,1]$), примерно 3, и изчисляваме трансформацията (ние знаем, че необходимия ни клон е $k=1$, но това е толкова сложна трансформация, че трябва да се покаже):

$$\omega(3) = 3 + \sqrt{3^2-1} = 3 + |3^2-1|^{1/2} e^{\frac{i\arg(3-1)}{2}} e^{\frac{i\arg(3+1)}{2}} e^{k\pi i} = 3 + |8|^{1/2} e^{\frac{i\arg(2)}{2}} e^{\frac{i\arg(4)}{2}} e^{k\pi i}.$$

Сега трябва да изчислим ъглите $\theta_1 = \arg(2)$ и $\theta_2 = \arg(4)$: те са на положителната част на реалната права, следователно сключват нулев ъгъл с нея: $\theta_1 = \theta_2 = 0$:

$$\omega(3) = 3 + |8|^{1/2} e^0 e^0 e^{k\pi i} = 3 + 8^{1/2} e^{k\pi i}.$$

Нека да видим при $k=0$:

$$\omega(3) = 3 + 8^{1/2} e^0 = 3 + 8^{1/2} = 3 + \sqrt{8} = 5.828.$$

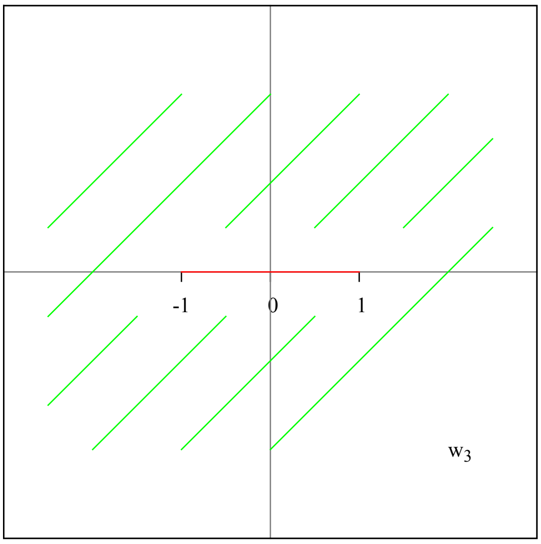
Което е извън единичния кръг. Сега $k=1$:

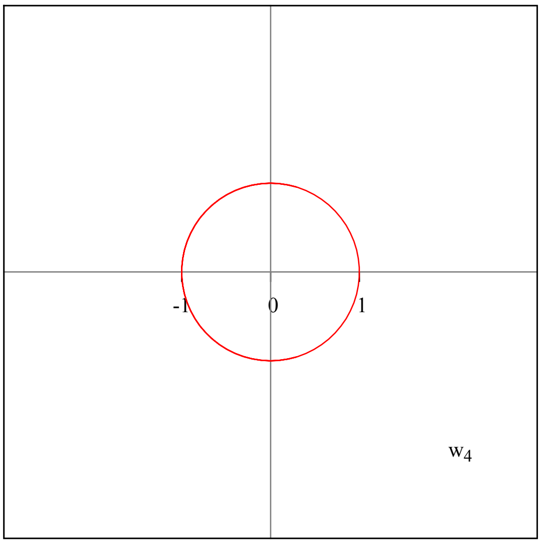
$$\omega(3) = 3 + 8^{1/2} e^{i\pi} = 3 + 8^{1/2}(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 3 + 8^{1/2}(-1) = 3 - \sqrt{8} = 0.171.$$

Което е във вътрешността на единичния кръг.

Нашата последна четвърта трансформация е:

$$\omega_4 = \omega_3 + \sqrt{\omega_3^2 - 1}\ (k=1).$$





Решението на задачата е композиция от функциите:

$$\omega_1 = e^{-i\pi/2}z,\ \omega_2 = \frac{1}{2}\left(\omega_1 + \frac{1}{\omega_1}\right),\ \omega_3 = \frac{8}{9}\omega_2 - \frac{1}{9},\ \omega_4 = \omega_3 + \sqrt{\omega_3^2 - 1}\ (k=1)$$

(ротация, Жуковски, линейна, Жуковски наобратно) и може да се запише така:

$$\omega = \omega_4 \circ \omega_3 \circ \omega_2 \circ \omega_1(z).$$

При този запис функциите се прилагат отдясно наляво.

Проверка на задачата. Пресмятанията с обратната функция на Жуковски са доста тежки, затова е добре да подадем реално число. Взимаме $-i/2$, което става реално след ротацията:

$$\omega_1(-i/2) = e^{-i\pi/2}\left(-\frac{i}{2}\right) = -\frac{i}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{i}{2}(-i) = -\frac{1}{2},$$

$$\omega_2(-1/2) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - 2\right) = \frac{1}{2}\frac{-1-4}{2} = -\frac{5}{4},$$

$$\omega_3(-5/4) = \frac{8}{9}\left(-\frac{5}{4}\right) - \frac{1}{9} = -\frac{10}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{11}{9}.$$

Нека пак да изчислим двата клона на обратната функция на Жуковски:

$$\omega_4(-11/9) = -\frac{11}{9} + \left|\left(-\frac{11}{9}\right)^2 - 1\right|^{1/2} e^{\frac{i\arg\left(-\frac{11}{9}-1\right)}{2}} e^{\frac{i\arg\left(-\frac{11}{9}+1\right)}{2}} e^{k\pi i} =$$

$$= -\frac{11}{9} + \left|\frac{121}{81} - 1\right|^{1/2} e^{\frac{i\arg(-20/9)}{2}} e^{\frac{i\arg(-2/9)}{2}} e^{k\pi i}.$$

И двата ъгъла $\theta_1 = \arg(-20/9)$ и $\theta_2 = \arg(-2/9)$ са на отрицателната част на реалната права, ъгълът който сключват с положителната част на реалната права е $\theta_1 = \theta_2 = \pi$, като вървим в положителна посока (обратна на часовниковата стрелка).

Ако искаме можем да вземем $\theta_1 = \theta_2 = -\pi$ като вървим в отрицателна посока (по часовниковата стрелка), но не можем да вземем $\theta_1 = \pi$ и $\theta_2 = -\pi$ — няма да излязат изчисленията.

Заместваме:

$$\begin{aligned}\omega_4(-11/9) &= -\frac{11}{9} + \left|\frac{121}{81} - \frac{81}{81}\right|^{1/2} e^{\frac{i\pi}{2}} e^{\frac{i\pi}{2}} e^{k\pi i} = -\frac{11}{9} + \left|\frac{40}{81}\right|^{1/2} e^{i\pi} e^{k\pi i} = \\ &= -\frac{11}{9} + \frac{2\sqrt{10}}{9}(\cos(\pi) + i\sin(\pi))e^{k\pi i} = -\frac{11}{9} + \frac{2\sqrt{10}}{9}(-1)e^{k\pi i} = \\ &= -\frac{11}{9} - \frac{2\sqrt{10}}{9}e^{k\pi i}.\end{aligned}$$

Нека да видим при $k = 0$:

$$\omega_4(-11/9) = -\frac{11}{9} - \frac{2\sqrt{10}}{9}e^0 = -\frac{11}{9} - \frac{2\sqrt{10}}{9} = -1.925.$$

Което е извън единичният кръг. Сега $k = 1$:

$$\begin{aligned}\omega_4(-11/9) &= -\frac{11}{9} - \frac{2\sqrt{10}}{9}e^{i\pi} = -\frac{11}{9} - \frac{2\sqrt{10}}{9}(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = \\ &= -\frac{11}{9} - \frac{2\sqrt{10}}{9}(-1) = -\frac{11}{9} + \frac{2\sqrt{10}}{9} = -0.519.\end{aligned}$$

Което е в търсената област. Решението на задачата е вярно. □

Задача 1. Да се намери аналитичната функция $f(z)$, такава че:

$$\Im f(z) = v(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

като а) $f(2) = 0$; б) $f(2) = i$.

Решение. Имаме дадена реалната функция:

$$v(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Търсим хармонично спрегнатата функция $u(x, y)$.

Намираме първа и втора производна спрямо x:

$$v'_x = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},\ v'_{xx} = \frac{6x^2y - 2y^3}{x^2 + y^2}.$$

Сега първа и втора производна спрямо y:

$$v'_y = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},\ v'_{xx} = -\frac{6x^2y - 2y^3}{x^2 + y^2}.$$

Уравнението на Лаплас $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ е изпълнено.

Използваме уравненията на Коши-Риман:

$$\left| \begin{array}{l} v'_x = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -u'_y, \\ v'_y = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = u'_x. \end{array} \right.$$

Но нямам никакво намерение да интегрирам това.

Можем да отгатнем, че функцията $u(x,y)$ е:

$$u(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Добавяме константа към $u(x,y)$ и записваме $f(z)$:

$$f(z) = -\frac{x}{x^2+y^2} + C + i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Искаме първо $f(2) = 0$, като $z = x + iy = 2 + i0 = 2$:

$$f(2) = -\frac{2}{4+0} + C + i\frac{0}{4+0} = 0.$$

$$-\frac{1}{2} + C + i0 = 0 \Longrightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Решението в случая е:

$$f(z) = -\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{1}{2}.$$

Сега да видим и за $f(2) = i$:

$$f(2) = -\frac{2}{4+0} + C + i\frac{0}{4+0} = i.$$

$$-\frac{1}{2} + C + i0 = i \Longrightarrow C = \frac{1}{2} + i \Longrightarrow C = \frac{1+2i}{2}.$$

Решението сега е:

$$f(z) = -\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{1+2i}{2}.$$

Можем да представим $f(z)$ във вида:

$$f(z) = \frac{-x+iy}{x^2+y^2} + C = -\frac{x-iy}{x^2+y^2} + C = -\frac{\overline{z}}{|z|^2} + C.$$

Получава се същото нещо. $\square$

Задача 3. С помощта на теоремата за резидуумите пресметнете интеграла:

$$I = \int_{C_3(4)} \frac{z}{1-\cos(z)} dz.$$

Решение. Подинтегралната функция е:

$$f(z) = \frac{z}{1-\cos(z)}.$$

Функцията има еднократна нула в $z = 0$ и еднократни полюси в $z = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, поради:

$$1 - \cos(z) = 0 \Longrightarrow \cos(z) = 1 \Longrightarrow z = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$$

Но явно не. По-нататъшни сметки показват, че имаме двукратни полюси в $z = 2k\pi$. Това досега не е излизало в задачите, така че ето обяснения:

Кратност на нула на функция се намира чрез производните на функцията: изчисляват се производните, докато се стигне до ненулева производна в точката, която проверяваме за нула: $f^{(k)}(z) \neq 0$, тогава казваме че точката z е k-кратна нула [1, стр. 202].

Полюсът е нула в знаменател (когато функцията е в знаменател, нулата се нарича полюс).

Искаме да видим кратността на нулата в точката $z = 2\pi$ за функцията $g(z)$:

$$g(z) = 1 - \cos(z) \Longrightarrow g(2\pi) = 0.$$

Проверяваме производните:

$$g'(z) = \sin(z) \Longrightarrow g'(2\pi) = 0,$$

$$g''(z) = \cos(z) \Longrightarrow g''(2\pi) = 1.$$

Втората производна е различна от нула: точката $z = 2\pi$ е двукратна нула. Същото важи и за точката $z = 0$, както и за всички точки $z = 2k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Областта на интегриране е вътрешността на окръжност с радиус 4 и център $(3, 0)$. Двукратните полюси в $z = 0$ и $z = 2\pi$ са в окръжността. Но ние имаме и нула в $z = 0$ от числителя — в случая обаче не можем да я съкратим. Записваме решението:

$$I = 2\pi i(\mathrm{Res}[z = 0] + \mathrm{Res}[z = 2\pi]).$$

Използваме формулата:

$$1 - \cos(z) = 2\sin^2\left(\frac{z}{2}\right).$$

Сега вече изчисляваме резидуума в $z = 0$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}[z=0] &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left[(z-0)^2\frac{z}{2\sin^2(z/2)}\right]^{(2-1)} = \lim_{z\to 0}\left[\frac{z^3}{2\sin^2(z/2)}\right]' = \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{3z^2 2\sin^2(z/2) - z^3 4\sin(z/2)\cos(z/2)\frac{1}{2}}{4\sin^4(z/2)} = \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{6z^2\sin(z/2) - 2z^3\cos(z/2)}{4\sin^3(z/2)}.
\end{aligned}$$

Използваме формулата $4\sin^3(\alpha) = 3\sin(\alpha) - \sin(3\alpha)$:

$$4\sin^3\left(\frac{z}{2}\right) = 3\sin\left(\frac{z}{2}\right) - \sin\left(\frac{3z}{2}\right).$$

Получаваме:

$$\operatorname{Res}[z=0] = \lim_{z\to 0}\frac{6z^2\sin(z/2) - 2z^3\cos(z/2)}{3\sin(z/2) - \sin(3z/2)}.$$

Което е неопределеност. Чрез прилагане правилото на Лопитал три пъти достигаме до крайно число, но сметките са много тежки, няма нужда — идеята е ясна.

По същия начин се изчислява и другия резидуум, където сметките са още по-тежки:

$$\operatorname{Res}[z=2\pi] = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 2\pi}\left[(z-2\pi)^2\frac{z}{2\sin^2(z/2)}\right]^{(2-1)}.$$

Много неприятни сметки поради двукратния полюс в знаменател, който не може да се съкрати с нулата в числител поради вида на функцията: $1 - \cos(z)$. $\square$

7 Седма тема

Задача 1. Изобразете конформно и еднозначно горната полуравнина D: $\{z,\ \Im z > 0\}$ върху разрязания единичен кръг G: $\{\omega,\ |\omega| < 1\} \setminus \{\omega,\ \omega = x + iy,\ 0 \le x \le 1,\ y = 0\}$.

Задача 2. Пресметнете:

$$I = \int_\Gamma \frac{e^{1/z}}{(2-z)\cos(2z)} dz,$$

като Γ е единичната окръжност, ориентирана в положителна посока (обратно на часовниковата стрелка).

Задача 3. Пресметнете:

$$I = \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz,\ f(z) = \frac{e^{1/z}}{z},$$

като Γ е единичната окръжност, ориентирана в положителна посока (обратно на часовниковата стрелка).

Задача 4. Нека D е област в комплексната равнина $\mathbb{C}$ и функцията $f(z)$ е аналитична в D. Нека реалната част на $f(z)$ е константа в D:

$$\Re f(z) = \mathrm{Const},\ z \in D.$$

Покажете, че $f(z) \equiv \mathrm{Const}$ в D.

Задача 5. Нека $f(z)$ е цяла функция (аналитична в цялата комплексна равнина $\mathbb{C}$). Нека реалната част на $f(z)$ е константа в $\mathbb{C}$:

$$\Re f(z) = \mathrm{Const},\ z \in \mathbb{C}.$$

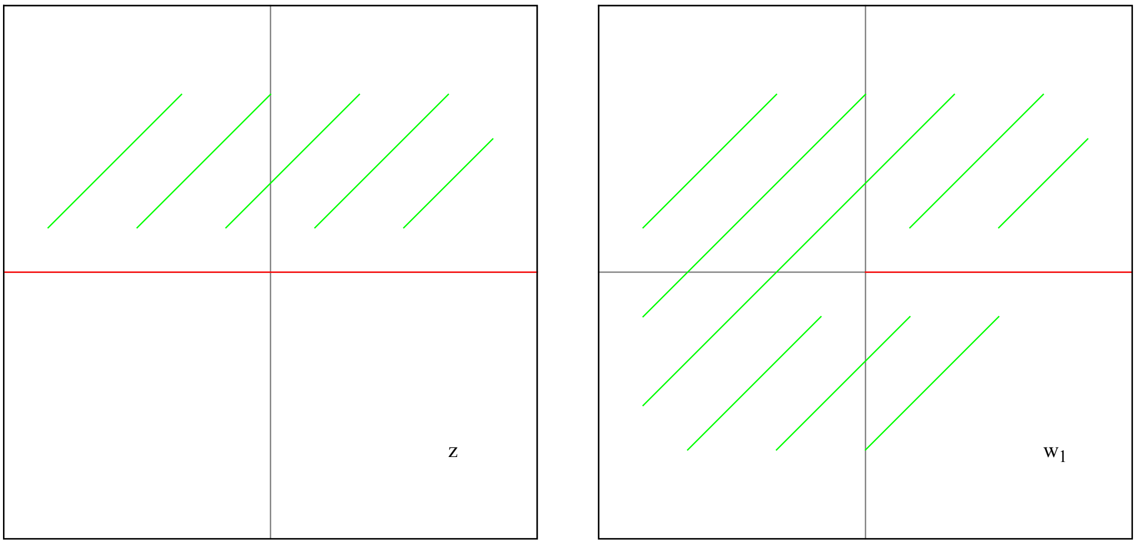
Покажете, че $f(z) \equiv \mathrm{Const}$ в $\mathbb{C}$.

Задача 1. Изобразете конформно и еднозначно горната полуравнина D: $\{z,\ \Im z > 0\}$ върху разрязания единичен кръг G: $\{\omega,\ |\omega| < 1\} \setminus \{\omega,\ \omega = x+iy,\ 0 \leq x \leq 1,\ y = 0\}$.

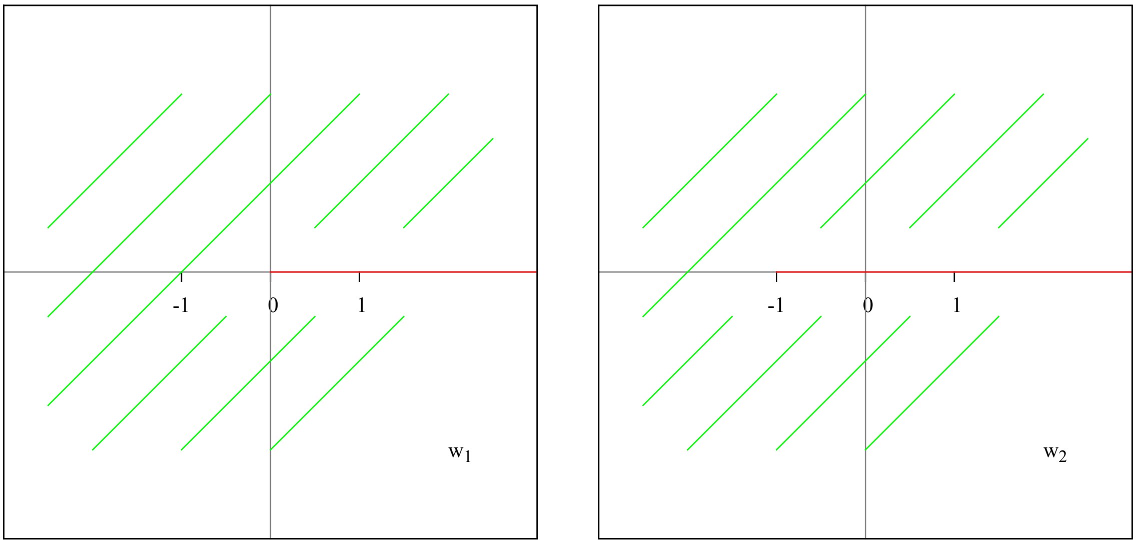
Решение. Идеята е да приложим функцията на Жуковски, за целта трябва да трансформираме дадената област в цялата комплексна равнина без отсечката $[-1, 1]$.

Имаме дадена горната полуравнина. Нека да видим функцията $\omega = z^2$ (дефиниция 1): ъгъл $\theta = \pi$ се трансформира в ъгъл $2\theta = 2\pi$. И двата ъгъла сключват нулев начален ъгъл с положителната част на реалната права.

Следователно при трансформация $\omega_1 = z^2$ горната полуравнина отива в цялата комплексна равнина, разрязана по положителната част на реалната права.



Сега "преместваме" границата на ω_1 с единица наляво. Използваме функцията $\omega_2 = \omega_1 - 1$, която транслира комплексната равнина с вектор -1.



Сега вече можем да приложим обратната функция на Жуковски (дефиниция 9):

$$\omega = z + \sqrt{z^2 - 1} = z + |z^2 - 1|^{1/2} e^{\frac{i \arg(z-1)}{2}} e^{\frac{i \arg(z+1)}{2}} e^{k\pi i}.$$

Погледнете и предишната задача: тема 6, задача 2. Знаем, че търсеният клон е $k = 1$, но все пак да потвърдим :)

Взимаме точката i. Прилагаме обратната функция на Жуковски:

$$\omega(i) = i + |i^2 - 1|^{1/2} e^{\frac{i \arg(i-1)}{2}} e^{\frac{i \arg(i+1)}{2}} e^{k\pi i}.$$

Трябва да изчислим големината на ъглите $\theta_1 = \arg(i - 1)$ и $\theta_2 = \arg(i + 1)$. Относно θ_1 имаме точката $z = -1 + i$:

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},\ \cos(\theta_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \theta_1 = \frac{3\pi}{4}.$$

Сега θ_2 — точката $z = 1 + i$:

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},\ \cos(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \theta_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Ъглите са взети в положителна посока, в отрицателна са: $\theta_1 = -5\pi/4$, $\theta_2 = -7\pi/4$, но не можем да ги смесваме!

Заместваме:

$$\begin{aligned}\omega(i) &= i + |-1-1|^{1/2} e^{\frac{i3\pi/4}{2}} e^{\frac{i\pi/4}{2}} e^{k\pi i} = i + |-2|^{1/2} e^{\frac{i3\pi}{8}} e^{\frac{i\pi}{8}} e^{k\pi i} = \\ &= i + 2^{1/2} e^{\frac{i\pi}{2}} e^{k\pi i} = i + 2^{1/2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) e^{k\pi i} = i + i2^{1/2} e^{k\pi i}.\end{aligned}$$

Нека да видим при $k = 0$:

$$\omega(i) = i + i2^{1/2} e^0 = i + i\sqrt{2} = 2.414i.$$

Което е извън единичния кръг. Сега и $k = 1$:

$$\omega(i) = i + i2^{1/2} e^{i\pi} = i + i\sqrt{2}(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = i - i\sqrt{2} = -0.414i.$$

Което е в единичния кръг.

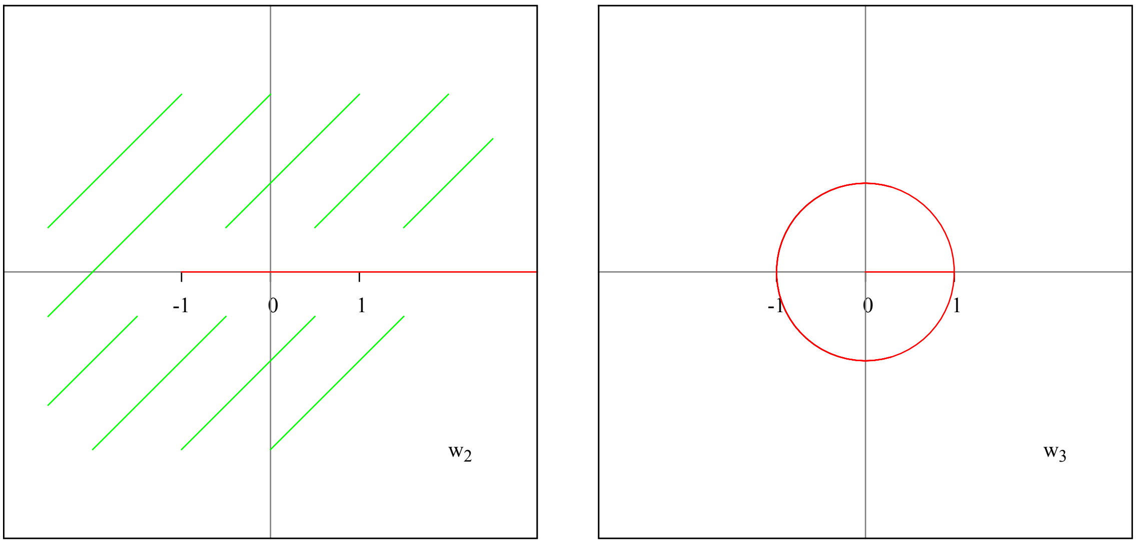
Остана да видим къде ще се трансформира $[1, \infty)$. Взимаме една точка от нея, примерно 3, и както видяхме в предишната задача:

$$\omega(3) = 0.171,$$

което означава, че $[1, \infty)$ се трансформира в отсечката $[0, 1]$.

Третата ни трансформация е:

$$\omega_3 = \omega_2 + \sqrt{\omega_2^2 - 1}\ (k = 1).$$



Решението на задачата е композиция от функциите:

$$\omega_1 = z^2, \ \omega_2 = \omega_1 - 1, \ \omega_3 = \omega_2 + \sqrt{\omega_2^2 - 1} \ (k = 1)$$

(степенна, транслация, Жуковски наобратно) и може да се запише така:

$$\omega = \omega_3 \circ \omega_2 \circ \omega_1(z).$$

При този запис функциите се прилагат отдясно наляво.

Проверка на задачата. Взимаме число от горната полуравнина, примерно i:

$$\omega_1(i) = i^2 = -1,$$

$$\omega_2(-1) = -1 - 1 = -2.$$

Заместваме директно с $k = 1$:

$$\begin{aligned}\omega_3(-2) &= -2 + \sqrt{(-2)^2 - 1} = -2 + |(-2)^2 - 1|^{1/2} e^{\frac{i\arg(-2-1)}{2}} e^{\frac{i\arg(-2+1)}{2}} e^{i\pi} = \\ &= -2 + |4 - 1|^{1/2} e^{\frac{i\arg(-3)}{2}} e^{\frac{i\arg(-1)}{2}} e^{i\pi} = -2 + |3|^{1/2} e^{\frac{i\pi}{2}} e^{\frac{i\pi}{2}} e^{i\pi} = \\ &= -2 + 3^{1/2} e^{i2\pi} = -2 + \sqrt{3}(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) = -2 + \sqrt{3} = -0.267.\end{aligned}$$

Което е в търсената област. Решението на задачата е вярно. □

Литература

[1] А. И. Маркушевич, *Краткий курс теории аналитических функций*, Наука, Москва, 1978

[2] Ралица К. Ковачева, Мариана Ив. Дурчева, *Комплексен анализ*, Технически Университет — София, 2010

[3] Р. Ковачева (лекции), М. Дурчева (упражнения), *Комплексен анализ — ФПМИ IV семестър*

[4] Сайтове: LaTeX Wikibooks, gnuplot tips, Wikipedia, Wolfram MathWorld

[5] Софтуер: TeX Live, gnuplot, Notepad++, Sumatra PDF, Windows XP