Algebra, Analytische Geometrie.

1. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1, & 0 & ,9 \\ -1, & 2, & 3, \\ -2, & 2, & 2, \end{pmatrix}.$$

♮ Zeige, daß A nichtsingulär ist und berechne die Inverse Matrix.©

Lösung: A ist nicht singulär, wenn $\det A \neq 0$. Ist das der Fall, so gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{1,1}, & A_{2,1}, & A_{3,1}, \\ A_{1,2}, & A_{2,2}, & A_{3,2}, \\ A_{1,3}, & A_{2,3}, & A_{3,3}, \end{pmatrix}.$$

Q.E.D.♮

2. Seien die geraden Linien l_1, l_2 vorgegeben,

$$l_1 : \begin{array}{l} x = \varrho + 1, \\ y = \varrho, \\ z = 0 \end{array}$$

und

$$l_2 : \begin{array}{l} x = \mu - 1, \\ y = -\mu, \\ z = 1, \end{array}$$

$\varrho, \mu \in (-\infty, \infty)$.
Finde die Gleichung einer geraden Linie, die orthogonal zu beiden ist. MOtiviere die Existenz der Lösung.
Berechne den Winkel zwischen l_1 und l_2.

Lösung: Bestimme zwei Vektoren, die je paralell zu $l_i, i = 1, 2$, sind und gehe vom Vektorprodukt aus.

3. Untersuche nach Lösbarkeit das System

$$\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + a^2 z = b \end{array}$$

wo a und b freie Parameter sind.

4. Schreibe die Gleichung der Ellypse mit Fozi in den Punkten ± 1, deren große Halbachse $= 4$ ist auf, sowie die Gleichung der Hyperbell Ξ, deren Foci F_{-1}, F_2 in ± 2 liegen und für jeden Punkt $M \in \Xi$

$$||MF_1| - |MF_2|| = 2.$$

Finde die Schnittpunkte beider.

5. Gegeben sei

$$\mathcal{A};= \begin{pmatrix} 1, & 1, & -2 \\ 0, & 2, & -2 \\ 1, & -1, & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Eigenwerte und - vektoren von A.

Analysis.

1. Berechne

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n^2}.$$

2. Sei $f \in C^{(3)}[a,b]$, wobei $f^{(3)}(x) = 0$, $x \in [a,b]$. Zeige, daß f der Form ist

$$f(x) = C_0 x^2 + C_1 x + C_2.$$

Lösung: Wende den Hauptsatz der Differentialrechnung an.

3. Berechne

$$\lim_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}).$$

4. Sei die Ellypse

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Rechecke, deren Eckpunkte auf $\mathcal{E}$ liegen. Zu finden sei derjenige, der die größte Fläche hat.

5. Finde die Fläche des Durchschnitts der Kugeln $K_i, i = 1, 2$

$$K_1 := \{z, |z-2| \leq 3\},\ K_2 := \{z, |z-4| \leq 2\}.$$